

22.1  
В 53

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ



# ВІСНИК

## ПРИКАРПАТСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК I



Івано-Франківськ - 1995

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

*ВІСНИК  
ПРИКАРПАТСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ*

**ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНІ  
НАУКИ**

*ВИПУСК I*



**ІВАНО-ФРАНКІВСЬК  
“ПЛАЙ”  
1995**

НБ ПНУС



602045

Автори наукових статей з природничо-математичних наук - викладачі та аспіранти Прикарпатського університету імені В.Стефаника - висвітлюють актуальні проблеми в галузі математики, фізики, матеріалознавства, техніки та інших природничих наук.

Для науковців, викладачів, аспірантів, магістрів, студентів, вчителів та інженерів.

The authors of natural science and mathematical articles - the professors and post-graduate students of Precarpathian Stefanyk University highlight topical problems in the field of mathematics, physics, material studies, technique and other natural sciences.

For scholars, professors, post-graduate students, graduate students, students, teachers and engineers.

**Редакційна рада:** проф., д-р філол. наук В.В.Грещук (голова ради), проф., д-р істор. наук, акад. АН Вищої школи України В.В.Грабовецький, проф., д-р фіз.-мат. наук, акад. АН Вищої школи України І.А.Климишин, проф., д-р філол. наук, акад. АПН України В.І.Кононенко, проф., д-р філол. наук, акад. АН Вищої школи України В.І.Матвіїшин, проф., д-р псих. наук Л.Е.Орбан, проф., д-р фіз.-мат. наук Б.К.Остафійчук, проф., д-р пед. наук, акад. АПН України М.Г.Стельмахович.

**Редакційна колегія:** проф., д-р фіз.-мат. наук, акад. АН Вищої школи України І.А.Климишин (відп. ред.), проф., канд. фіз.-мат. наук Б.В.Василишин, доц., канд. фіз.-мат. наук В.М.Кланічка, проф., д-р фіз.-мат. наук Б.К.Остафійчук, доц., канд. фіз.-мат. наук В.М.Пилипів (відп. секр.), доц., канд. фіз.-мат. наук Р.І.Собкович, проф., д-р хім. наук Д.М.Фреїк.

Адреса редакційної колегії:

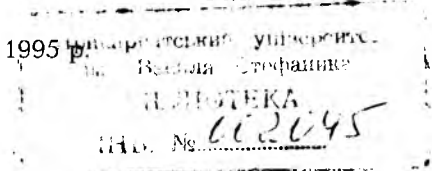
284000, Івано-Франківськ, вул.Шевченка, 57,

Прикарпатський університет імені Василя Стефаника.

© Видавництво "Плаї" Прикарпатського університету, 1995.

Тел.: 2-33-79

Видається з 1995 р.



В.І.Охрончук

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ПЕРШОГО ПОРЯDKУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРИ

У роботі одержано нові результати про диференціальні нерівності для окремого класу немонотонних неперервних функцій. Встановлено достатні умови для виконання теорем про диференціальні нерівності першого порядку в банаховому просторі. Результати можуть бути використані при наближеному розв'язуванні диференціальних рівнянь.

In this work we received the new results about the differential inequalities for one class continuous functions that are not monotony. We received the sufficiency conditions for the existence of the theorem for differential inequalities by first order in Banach's space. The results can be usefull for approximate solutions of the differential equations.

У даній роботі наводяться теореми порівняння для розв'язків диференціальних нерівностей і рівнянь першого порядку з немонотонними функціями спеціального виду.

Як відомо [1], С.О.Чаплигіним доведена теорема: якщо  $x(t)$  - розв'язок задачі Коші  $x'(t) = f(t, x(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t)$  задовільняє нерівність  $y'(t) > f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0 \geq x_0$  на проміжку  $[t_0, T]$ ;  $f(t, x(t))$  - неперервна скалярна функція;  $x(t)$  і  $y(t)$  - неперервно диференційовані функції для  $t \in [t_0, T]$ , то  $y(t) > x(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

Якщо функція  $f(t, x(t))$  не скалярна, то теорема, взагалі кажучи, невірна. В роботі [2] одержані результати у випадку банахового простору  $E$ , якщо функція  $f(t, x)$  і  $[0, T] \times E \rightarrow E$  немонотонна по  $x$ , але існує  $\lambda(t) > 0$ , при якому  $f(t, x) + \lambda(t)x$  не спадає по  $x$ .

Нижче наводяться теореми порівняння розв'язків, якщо  $x(t)$  - елемент банахового простору:

1. Нехай  $E$  - напіворядкований банахів простір з конусом  $E_+$ ,  $E_+^*$  - множина лінійних неперервних функціоналів  $\varphi$  на  $E$ ,  $\varphi(x) \geq 0$  для  $x \in E_+$ . Під нерівністю  $x \leq y$  розуміємо  $y - x \in E_+$ .

Означення. Функцію  $f(t, x, y)$  і  $[0, T] \times E \times E \rightarrow E$  називаємо квазімонотонно зростаючою по  $x$  і квазімонотонно спадною по  $y$ , якщо із того, що  $x, y \in E$ ,  $x \leq y$ ,  $\varphi \in E_+^*$ ,  $\varphi(x) = \varphi(y)$  випливає

$$\begin{aligned} \varphi(f(t, x, u)) &\leq \varphi(f(t, y, u)), \quad \forall u \in E, \\ \varphi(f(t, v, y)) &\leq \varphi(f(t, v, x)), \quad \forall v \in E, \end{aligned}$$

Теорема 1. Якщо функція  $\phi(u) + \lambda u$  монотонна, то функція  $\phi(u)$  - квазімонотонна.

Доведення. При всяких  $U_1 \leq U_2$  маємо  $\varphi(u_1) + \lambda u_1 \leq \varphi(u_2) + \lambda u_2$ . Оскільки функціонал додатний, то

$$\varphi(\Phi(u_1) + \lambda u_1) \leq \varphi(\Phi(u_2) + \lambda u_2),$$

а звідси виходить  $\varphi(\Phi(u_1)) + \lambda \varphi(u_1) \leq \varphi(\Phi(u_2)) + \lambda \varphi(u_2)$ . Коли

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2), \text{ то } \varphi(\Phi(u_1)) \leq \varphi(\Phi(u_2)).$$

Зауваження. Якщо функція  $\Phi(u)$  квазімонотонна, то звідси ще не виходить, що функція  $\Phi(u) + \lambda(t)u$  монотонна. Наведемо приклад квазімонотонної функції  $\Phi(u)$ , для якої не існує такого  $\lambda(t) > 0$ , щоб функція  $\Phi(u) + \lambda(t)u$  була монотонна.

Приклад. Розглянемо простір  $R^{n+1}$  з конусом:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in E_+, \text{ якщо } \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq z \text{ при } u \in E_+, \varphi(u) \geq 0.$$

Загальний вигляд лінійного функціоналу в  $R^{n+1}$

$$\varphi(u) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \gamma z_n. \text{ Оскільки } u(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n, \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}) \in E_+, \text{ то маємо}$$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \gamma$ . Нехай для довільних  $u_1 \leq u_2$  виконано  $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$ . Це означає, що

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 &\leq \Delta z^2, \varphi(u_2) - \varphi(u_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i + \gamma \Delta z = 0, \\ \gamma^2 \Delta z^2 &= (\sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i)^2 \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2. \end{aligned}$$

Одержуємо нерівності

$$\sum_{i=k}^n \alpha_i \alpha_k \Delta x_i \Delta x_k \geq \sum_{i=k}^n \alpha_i^2 \Delta x_k^2, \quad \sum_{i=k}^n (\alpha_i \Delta x_k - \alpha_k \Delta x_i)^2 \leq 0.$$

З останньої нерівності випливає  $\alpha_i \Delta x_k - \alpha_k \Delta x_i = 0, i, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k$ .

Розглянемо функцію

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \Phi(x_1, \dots, x_n, z) = (0, \dots, x_k, 0, \dots, -x_i, 0, \dots, 0), \\ \Phi(u_2) - \Phi(u_1) &= (0, \dots, \Delta x_k, 0, \dots, -\Delta x_i, 0, \dots, 0), \\ \varphi(\Phi(u_2) - \Phi(u_1)) &= \alpha_i \Delta x_k - \alpha_k \Delta x_i = 0. \end{aligned}$$

Отже,  $\Phi(u)$  - одна з можливих квазімонотонних функцій в просторі  $R^{n+1}$ .

Покажемо, що не існує  $\lambda(t) > 0$ , при якому  $\Phi(u) + \lambda(t)u$  не спадає по  $u$ . Оскільки

$$\begin{aligned} \Phi(u) + \lambda(t)u &= (0, \dots, x_k, \dots, -x_i, 0, \dots, 0) + \lambda(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_n) = \\ &= (\lambda x_1, \dots, x_k + \lambda x_i, \lambda x_{i+1}, \dots, -x_i + \lambda x_k, \dots, \lambda x_n, \lambda z), \end{aligned}$$

$$\Phi(u_2) + \lambda u_2 - \Phi(u_1) - \lambda u_1 = (\lambda \Delta x_1, \dots, \Delta x_k + \lambda \Delta x_i, \dots, -\Delta x_i + \lambda \Delta x_k, \dots, \lambda \Delta x_n, \lambda \Delta z).$$

Якщо  $u_2 \geq u_1$ , то  $\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 \leq \Delta z^2$ .

Припустимо, що функція  $\Phi(u) + \lambda(t)u$  монотонна. Тоді має виконуватись нерівність

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n \Delta x_m^2 + \Delta x_k^2 + \Delta x_i^2 \leq \lambda^2 \Delta z^2,$$

з якої одержуємо нерівність  $\Delta x_k^2 + \Delta x_i^2 \leq \lambda^2 (\Delta z^2 - \sum_{m=1}^n \Delta x_m^2)$ . Виберемо  $u_1$  і

$u_2$  так, щоб  $\Delta z^2 - \sum_{m=1}^n \Delta x_m^2 = \delta$ , де число  $\delta$  можна вважати як завгодно малим. При фіксованому  $\lambda$  ліва частина останньої нерівності має бути як завгодно малою, що неможливо. Дійсно, нехай  $\Delta x_k^2 = \lambda^2 \cdot \Delta x_i^2 = \lambda^2$ , тоді  $2\lambda^2 \leq \lambda^2 (\Delta z^2 - \sum_{m=1}^n \Delta x_m^2)$ , що дає нерівність

$2 \leq \Delta z^2 - \sum_{m=1}^n \Delta x_m^2$ . Останнє ж не завжди виконується. Таким чином,

функція  $\Phi(u) + \lambda(t)u$  не буде монотонною. Отже, клас квазімонотонних функцій ширший, ніж клас функцій  $\Phi(u)$ , для яких  $\Phi(u) + \lambda(t)u$  - монотонна.

2. Наведемо теореми порівняння для розв'язків диференціальних рівнянь і нерівностей, що узагальнюють результати робіт [2,3].

Теорема 2. Нехай функція  $f(t, x, y): [0, T] \times E \times E \rightarrow E$  неперервна по  $t$  при фіксованих  $x$  і  $y \in E$  і цілком неперервна по  $x$  і  $y$ , квазімонотонно зростає по  $x$  і квазімонотонно спадає по  $y$ ;  $v(t), u(t): [0, T] \rightarrow E$  - неперервно диференційовані для  $t \in [0, T]$  функції. Нехай виконуються нерівності

$$v(0) < u(0), \quad (1)$$

$$v'(t) - f(t, v, u) < u'(t) - f(t, u, v) \quad (2)$$

для  $t \in [0, T]$ , тоді має місце нерівність

$$v(t) < u(t) \quad (3)$$

на всьому проміжку  $[0, T]$ .

Доведення. Нехай  $u(t) - v(t) = z(t)$ . З умови (1) маємо  $z(0) > 0$ . Припустимо, що нерівність (3) не виконується для всякого  $t \in [0, T]$ . Тоді існує таке  $t_0 \in [0, T]$ , що  $z(t_0)$  належить границі конуса  $E_+$ ,  $z(t) > 0$  для  $0 \leq t < t_0$ . Згідно з теоремою Хана-Банаха [4] знайдеться таке  $\varphi \in E_+^*$ , що

$$\varphi(z(t_0)) = 0 \quad (4)$$

$$\varphi(z(t)) > 0, z(t) \in \text{int } E_+, \quad (5)$$

Оскільки  $\varphi(z(t)) > 0$  для  $0 \leq t < t_0$ , з (4) випливає

$$\varphi(z'(t_0)) \leq 0 \quad (6)$$

Маєм  $v(t_0) \leq u(t_0)$ ,  $\varphi(v(t_0)) = \varphi(u(t_0))$ . З умови квазімонотонності одержуємо

$$\varphi(f(t_0, v(t_0), u(t_0))) \leq \varphi(f(t_0, v(t_0), v(t_0))) \leq \varphi(f(t_0, u(t_0), u(t_0))) \quad (7)$$

З умов (2) і (5) виходить

$$\varphi(v'(t_0) - f(t_0, v(t_0), u(t_0))) < \varphi(u'(t_0) - f(t_0, u(t_0), v(t_0))), \text{ що дає}$$

$$\varphi(v'(t_0)) < \varphi(u'(t_0)), \text{ тобто } \varphi(z'(t_0)) > 0.$$

Останнє протирічить нерівності (6). Теорема доведена.

Якщо  $f(t, x, y) = f(t, x)$ , то маємо результат роботи [3].

Теорема 3. Нехай функція  $f(t, x, y): [0, T] \times E \times E \rightarrow E$  неперервна по  $t$  при фіксованих  $x$  і  $y$  цілком неперервна по  $x$  і  $y$ , квазімонотонно зростає по  $x$ , не зростає по  $y$ ;  $u(t), v(t), x(t): [0, T] \rightarrow E$  - неперервно диференційовані на проміжку  $[0, T]$ . Виконуються нерівності

$$v(0) < x(0) < u(0), \quad (1')$$

$$v'(t) < f(t, v, u), t \in [0, T], \quad (2')$$

$$u'(t) > f(t, u, v), t \in [0, T].$$

Тоді має місце нерівність

$$v(t) < x(t) < u(t), t \in [0, T],$$

де  $x(t)$  - розв'язок задачі Коші

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t)), x(0) = x_0, t \in [0, T].$$

Доведення. Позначимо  $u(t) - v(t) = z(t)$ . Припустимо, що нерівність  $x(t) < u(t)$  не виконується при всіх значеннях  $t \in [0, T]$ . Нехай існує таке  $t_0 \in [0, T]$ , що  $x(t_0) = u(t_0)$ ,  $\varphi(x(t_0)) = \varphi(u(t_0))$ ,  $\varphi(z(t_0)) > 0$  для  $0 \leq t < t_0 \leq T$ ; звідси виходить, що  $\varphi(z'(t_0)) \leq 0$ . Якщо  $x(t_0) = u(t_0)$ , то згідно з теоремою 2  $v(t_0) < x(t_0)$ . З умови квазімонотонності по  $x$  випливає  $\varphi(f(t_0, x(t_0), x(t_0))) \leq \varphi(f(t_0, u(t_0), x(t_0)))$ . Оскільки  $f(t, x, y)$  не зростає по  $y$ , то

$$f(t_0, u(t_0), x(t_0)) \leq f(t_0, u(t_0), v(t_0)),$$

$$\varphi(f(t_0, u(t_0), x(t_0))) \leq \varphi(f(t_0, u(t_0), v(t_0))).$$

Одержуємо нерівність  $\varphi(f(t_0, x(t_0), x(t_0))) \leq \varphi(f(t_0, u(t_0), v(t_0)))$ . З нерівності (2') і (5) виходить, що  $\varphi(x'(t_0)) < \varphi(u'(t_0))$ , тобто  $\varphi(z'(t_0)) > 0$ , що неможливо. Таким чином,  $x(t) < u(t)$  на проміжку  $[0, T]$ . Аналогічно доводиться нерівність  $v(t) < x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

У роботі [2] доведені теореми для частинного випадку:  $f(t, x, y) + \lambda_1(t)x$  ( $\lambda_1(t) \geq 0$ ) не спадає по  $x$ ,  $f(t, x, y) - \lambda_2(t)y$  ( $\lambda_2(t) \geq 0$ ) не зростає по  $y$ .

Теорема 4. Нехай  $f(t, x, y)$  неперервна по  $t$  при фіксованих  $x$  і  $y$  ( $x, y \in E$ ) і цілком неперервна по  $x$  і  $y$ . Функція  $f(t, x, y) + \mu(t)x$  ( $\mu(t) \geq 0$ ) не спадає по  $x$ ;  $f(t, x, y) - N(t)y$  ( $N(t) > 0$ ) не зростає по  $y$ ;  $v(t), u(t)$  - неперервно диференційовані на проміжку  $[0, T]$  функції; крім того, виконуються умови  $v(0) = u(0)$ ,

$v'(t) - f(t, v, u) < u'(t) - f(t, u, v)$ ,  $t \in [0, T]$ . Тоді буде вірною нерівність  $v(t) < u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Доведення. Використовуючи результат роботи [2], запишемо

$$z(t) = \exp\left(-\int_0^t P(s) ds\right) \int_0^t \{ [f(s, v(s) + z(s), v(s) + \mu(s)z(s)) - \\ - [f(s, v(s), v(s) + z(s) - N(s)z(s))] \} \exp\left(\int_0^s P(\tau) d\tau\right) ds + \rho(t),$$

де  $z(t) = u(t) - v(t)$ ,  $P(s) = \mu(s) + N(s)$ ,  $\rho(t) = \int_0^t \alpha(s) \exp\left(-\int_0^s P(\tau) d\tau\right) ds$ ,

$$\alpha(t) = u'(t) - v'(t) - f(t, u) + f(t, v) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Одержуємо  $\rho(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$ ; отже,  $z(t) > 0$  на проміжку  $[0, T]$ .

Теорема 5. Нехай  $f(t, x, y): [0, T] \times E \times E \rightarrow E$  неперервна по  $t$  при фіксованих  $x$  і  $y$ , цілком неперервна по  $x$  і  $y$ ,  $f(t, x, y) + \mu(t)x$  неспадає по  $x$ ,  $f(t, x, y)$  не зростає по  $y$ . Функції  $u(t), v(t), x(t): [0, T] \rightarrow E$  неперервно диференційовані, задовольняються нерівності

$$\begin{aligned} v'(t) &\leq f(t, v(t), u(t)), \\ u'(t) &\geq f(t, u(t), v(t)), \\ x'(t) &= f(t, x(t), x(t)) \end{aligned}$$

на проміжку  $[0, T]$ ,  $v(0) = u(0) = x(0)$ . Система

$$\begin{aligned} v'(t) &= f(t, v, u) \\ u'(t) &= f(t, u, v) \end{aligned} \quad (8)$$

має єдиний розв'язок на проміжку  $[0, T]$ , тоді виконуються нерівності  $v(t) \leq x(t) \leq u(t)$  на всьому проміжку  $[0, T]$ .

Доведення. Використовуючи результат роботи [2], одержуємо

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \exp\left(-\int_0^t \mu(s) ds\right) \int_0^t [f(s, v(s), u(s) + \mu(s)v(s))] \exp\left(\int_0^s \mu(\tau) d\tau\right) ds \equiv F(t, v, u), \\ u(t) &\geq \exp\left(-\int_0^t \mu(s) ds\right) \int_0^t [f(s, u(s), v(s) + \mu(s)u(s))] \exp\left(\int_0^s \mu(\tau) d\tau\right) ds \equiv F(t, u, v). \end{aligned}$$

Якщо  $v^*(t), u^*(t)$  - крайні розв'язки (див. [5]) системи (8), то згідно з теоремою 8[5] виконуються нерівності

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v^*(t) \leq u(t), \\ v(t) &\leq u^*(t) \leq u(t) \end{aligned}$$

на проміжку  $[0, T]$ . З умови єдиності розв'язку системи (8) випливає нерівність  $v(t) \leq x(t) \leq u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Зауваження. Якщо в умовах теореми 5 знак  $\leq$  замінити знаком  $<$ , то одержимо нерівності  $v(t) < x(t) < u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

1. Лузин Н.Н. О методе приближённого интегрирования акад. С.А.Чаплыгина//Успехи мат. наук. - Т.6. - Вип.6 (46). - 1951. - С.3-27.
2. Курпель Н.С., Охрончук В.И. О дифференциальных неравенствах в банаховом пространстве//Методы приближённого решения дифференциальных и интегральных уравнений. - К.: Изд-во ИМ АН УССР, 1973. - С.124-129.
3. Volkman P. Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Functionen in topologischen Vektorräumen// Math. Zeit. - B.127. - H.2. - 1972. - S.157-164.
4. Данфорд Н., Шварц Д.Т. Линейные операторы: Общая теория. - М.: Иностран. лит., 1962. - 895 с.
5. Курпель Н.С., Шувар Б.А. О двусторонних операторных неравенствах для уравнений типа Вольтерра//Нелинейные краевые задачи математической физики. - К.: Изд-во ИМ АН УССР, 1972. - С. 264-282.

**Г.П.Малицька, М.П.Федорів**

**ПОБУДОВА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ  
ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ  
ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ**

де  $G_0(t,R;\tau,S;S(t,\tau))$  - ф.р. задачі Коші для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^r y_i \frac{\partial u}{\partial z_i} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, S(t, \tau)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$S(t, \tau) = \left( \xi, \eta - \xi(t - \tau), \zeta - \eta(t - \tau) - \frac{\xi(t - \tau)^2}{2} \right), \quad (5)$$

$\varphi(t,R;\tau,S)$  - шукана функція, про яку апіорі припускаємо:

У роботі встановлено точні оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь Колмогорова.

In this paper we established the exact estimations of fundamental solutions for Cauchy's problem of the ultraparabolic equations by Kolmogorov.

У даній роботі побудовано фундаментальний розв'язок (ф.р.) задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь. У роботах [1-3] теж побудовано ф.р. для такого класу рівнянь, але в даній статті одержано точні оцінки ф.р.

Розглянемо таку задачу Коші:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^r y_i \frac{\partial u}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t, R) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(t, R) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(t, R)u + f(t, R), \quad (1)$$

$$u(0, R) = u_0(R), \quad R \in R_s, \quad s = m + n + r, \quad n \geq m \geq r, \quad (2)$$

$$\mu^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, R) \xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2, \quad \mu > 0, \quad (3)$$

$a_{kj}(t, R)$ ,  $b_k(t, R)$ ,  $c(t, R)$  - неперервні по  $t, R$  в  $\Pi_T = \{(t, R), 0 \leq t \leq T, R \in R_s\}$ , раз неперервно диференційовні по  $y, z$ , обмежені разом з похідними,  $a_{kj}(t, R)$  задовольняють умову Гельдера з показником  $\alpha$   $0 < \alpha \leq 1$  по  $x$  рівномірно відносно  $t, y, z$ .

За цих умов існує існує ф.р. задачі (1), (2). Позначимо ф.р. задачі (1),(2) через  $Z(t, R; \tau, S)$ .

$Z(t, R; \tau, S)$  будемо шукати у вигляді:

$$Z(t, R; \tau, S) = G_0(t, R; \tau, S, S(t, \tau)) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{R_\beta} G_0(t, R; \beta, \mu, \mu(t, \beta)) \varphi(\beta, \mu; \tau, S) d\mu, \quad (4)$$

$$|\varphi(t, R; \tau, S)| \leq C(t - \tau)^{-(n+3m+5r+2-\alpha)/2} \exp\{-c, r(t, R; \tau, S)\},$$

$$\rho(t, R; \tau, S) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}{4(t - \tau)} + 3 \frac{\sum_{i=1}^m \left( y_i - \eta_i + \frac{x_i + \xi_i}{2} (t - \tau) \right)^2}{(t - \tau)^3} + 180 \frac{\sum_{i=1}^r \left( z_i - \zeta_i + \frac{y_i + \eta_i}{2} (t - \tau) + \frac{x_i - \xi_i}{12} (t - \tau)^2 \right)^2}{(t - \tau)^3}, \quad (6)$$

$$|\Delta_x \varphi(t, R, \tau, S)| \leq C(t - \tau)^{-(n+3m+5r+2-\alpha)/2} \times \mu \alpha_1 \xi \left\{ \exp\{-c_1 \rho(t, R, \tau, S)\}, \exp\{-c_2 \rho(t, R', \tau, S)\} \right\} |x - x'|^{\alpha_2}, \quad (7)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad R' = (x', y, z),$$

існують неперервні похідні  $\varphi'_y, \varphi'_z, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$ .

Підрахуємо і оцінимо  $K(t, R; \tau, S) = LG_0(t, R; \tau, S, S(t, \tau))$

$$|K(t, R; \tau, S)| \leq \left| \sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(t, S(t, \tau)) - a_{ij}(t, R)] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} G_0 - \sum_{i=1}^n b_i(t, R) \frac{\partial G_0}{\partial x_i} - c(t, R) G_0 \right|. \quad (8)$$

Використаємо оцінку для ф.р.  $G_0(t, R; \tau, S, S(t, \tau))$  і для похідних ф.р.

$$|D_x^k G_0(t, R; \tau, S, S(t, \tau))| \leq C(t - \tau)^{-(n+3m+5r+k)/2} \exp\{-c_1 \rho(t, R, \tau, S)\}, \quad (9)$$

$$|k| = 0, 1, 2,$$

де сталі  $C, c_1$  залежать від  $n, m, r, \mu, T, |a_{ij}(t, S(t, \tau))| \leq M$ . Тому

$$|K(t, R, \tau, S)| \leq A \left( |x - \xi|^\alpha + |y - \eta| + \xi(t - \tau) + \left| z - \zeta + \eta(t - \tau) + \frac{\xi(t - \tau)^2}{2} \right| \right) \exp\{-c(t, R, \tau, S)\} \times$$

$$\times (t - \tau)^{-(n+3m+5r+2)/2} + M(t - \tau)^{-(n+3m+5r-1)/2} \exp\{-c(t, R, \tau, S)\} + M_2(t - \tau)^{-(n+3m+5r)/2} \exp\{-c\} \leq$$

$$\leq A(t - \tau)^{-(n+3m+5r+2-\alpha)/2} \exp\{-c(t, R, \tau, S)\}. \quad (10)$$

Для того, щоб  $Z(t,R;\tau,S)$  була розв'язком при  $t>\tau$  рівняння (1), потрібно, щоб  $\varphi(t,R;\tau,S)$  була розв'язком інтегрального рівняння

$$\varphi(t,R;\tau,S) = -K(t,R;\tau,S) + \int_{\tau}^t d\beta \int_R K(t,R;\beta,\mu) \varphi(\beta,\mu;\tau,S) dS. \quad (11)$$

Інтегральне рівняння (11) розв'язується методом послідовних наближень, при цьому  $\varphi(t,R;\tau,S)$  є його резольвентою.

$$\varphi(t,R;\tau,S) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_n(t,R;\tau,S),$$

$$K_1(t,R;\tau,S) = K(t,R;\tau,S),$$

$$K_m(t,R;\tau,S) = \int_{\tau}^t d\beta \int_R K(t,R;\beta,\mu) K_{m-1}(\beta,\mu;\tau,S) dM. \quad (12)$$

Проведемо оцінку повторних ядер, оцінимо  $K_2(t,R;\tau,S)$ .

$$|K_2(t,R;\tau,S)| \leq A^2 \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{(2-\alpha)/2} (\beta-\tau)^{(2-\alpha)/2}} \int_R \exp\{-\alpha(t,R;\beta,\mu) - \alpha(\beta,\mu;\tau,S)\} (t-\beta)^{-(3m+5r+n)/2} \times \\ \times (\beta-\tau)^{-(3m+5r+n)/2} d\mu = A^2 B \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{4c}}\right)^S (t-\tau)^{(2\alpha-3m-5r-n-2)/2} \exp\{-\alpha\}. \quad (13)$$

Аналогічно одержимо оцінку для  $K_m(t,R;\tau,S)$ :

$$K_m(t,R;\tau,S) \leq \frac{\Gamma^m\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)} A^m \left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{(m-1)S}{2}} (t-\tau)^{(2m\alpha-3m-5r-n-2)/2} \exp\{-\alpha(t,R;\tau,S)\}. \quad (14)$$

Із оцінки (14) випливає рівномірна й абсолютна збіжність ряду (12) при  $t-\tau \geq \epsilon > 0$  і справедливості для  $\varphi(t,R;\tau,S)$  апіорної оцінки (6).

Доведемо справедливості (7). При  $|x-x'| > (t-\tau)^{1/2}$  вона випливає із (6). Тому розглянемо випадок  $|x-x'| \leq (t-\tau)^{1/2}$ .

Оцінимо спочатку  $\Delta K(t,R;\tau,S)$ .

$$|\Delta K(t,R;\tau,S)| \leq \left| \sum_{k,j=1}^n \Delta a_{kj}(t,R) \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_k \partial x_j} \right| + |a_y(t,S(t,\tau)) - a_y(t,R)| \left| \Delta \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_k \partial x_j} \right| + \sum_{i=1}^n |\Delta b_i(t,R)| \left| \frac{\partial G_0}{\partial x_i} \right| + \\ + |C(t,R)| |\Delta G_0| + \sum_{i=1}^n |b_i(t,R)| |\Delta G_0| + |\Delta C(t,R)| |\Delta G_0| \leq C_2 B_n |x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-(n+3m+5r+2)/2} + \\ + C_3 B^2 |x-x'|^\alpha |x-x'| (t-\tau)^{-(n+3m+5r+3)/2} + C_4 B^n |x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-(n+3m+5r+1)/2} + \\ + C_2 M^n |x-x'| (t-\tau)^{-(n+3m+5r+2)/2} + C_5 |x-x'|^\alpha (t-\tau)^{-n/2} (t-\tau)^{-(3m+5r)/2} + \\ + C_1 M |x-x'| (t-\tau)^{-(n+3m+5r+1)/2} \varepsilon \xi \pi \{-c_1 \varphi(t,R;\tau,S)\} \quad (15)$$

При проведенні дальших оцінок члени вигляду  $\Delta \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_i \partial x_i}$  були представлені по теоремі про середнє, а потім оцінені.

Весь час при  $|x-x'| < (t-\tau)^{1/2}$   $i = -1 \leq \theta \leq 1$  використовувалися такі нерівності:

$$-1 + \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2}} \leq \left| \frac{x-\xi}{(t-\tau)^{-1/2}} + \frac{\theta(x-x')}{(t-\tau)^{1/2}} \right| \leq \frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/2}} + 1, \\ -1 + \frac{|y-\eta + \frac{x+\xi}{2}(t-\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}} \leq \left| \frac{y-\theta + \frac{x+\xi}{2}(t-\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} + \theta \frac{(x-x')}{2(t-\tau)^{1/2}} \right| \leq \\ \leq \frac{|y-\eta + (x+\xi)(t-\tau)/2|}{(t-\tau)^{3/2}} + 1, \\ -1 + \frac{|z-\zeta + \frac{y+\eta}{2}(t-\tau) + \frac{x-\xi}{12}(t-\tau)^2|}{(t-\tau)^{5/2}} \leq \\ \leq \left| \frac{z-\zeta + \frac{y+\eta}{2}(t-\tau) + \frac{x-\xi}{12}(t-\tau)^2}{(t-\tau)^{5/2}} + \theta \frac{x-x'}{12(t-\tau)^{1/2}} \right| \leq \\ \leq \frac{|z-\zeta + \frac{y+\eta}{2}(t-\tau) + \frac{x-\xi}{12}(t-\tau)^2|}{(t-\tau)^{5/2}} + 1.$$

Тому маємо:

$$|\Delta K(t,R;\tau,S)| \leq A_1 (t-\tau)^{-(n+3m+5r+2-\alpha)/2} |x-x'|^\alpha \varepsilon \xi \pi \{-c_1 \varphi\} \quad (16)$$



З допомогою нерівностей (6) і (16) оцінимо  $\Delta W$ :

$$|\Delta W| = \left| \int_{\tau}^t d\beta \int_{R_k} \Delta K(t, R; \beta, \mu) \varphi(\beta, \mu; \tau, S) d\mu \right| \leq \\ \leq CA|x - x'|^{\alpha_1} \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1-\alpha/2} (\beta-\tau)^{1-\alpha/2}} \int_{R_k} (t-\beta)^{-(n+3m+5r)/2} \times \\ \times \left[ e^{-c\rho(t, R; \beta, \mu)} + e^{-c\rho(t, R, \mu, \beta)} \right] e^{-c\rho(\beta, \mu; \tau, S)} (b-\tau)^{-(n+3m+5r)/2} d\mu \leq C|x - x'|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-(n+3m+5r-\alpha-\alpha_1)/2} \times \\ \times \exp\{-c_1\rho(t, R; \tau, S)\}.$$

Отже, апіорні оцінки (6), (7) доведено. Для доведення існування обмежених неперервних похідних  $\varphi_{y_i}'$ ,  $\varphi_{z_i}'$  використаємо таку властивість ф.р.  $G_0(t, R; \tau, S, \mu)$  рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^r y_i \frac{\partial u}{\partial z_i} = \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(t, \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, \mu) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(t, \mu) u, \quad \mu(\gamma, \theta, \lambda). \quad (17)$$

Якщо коефіцієнти рівняння (17) мають  $l$  неперервних обмежених похідних по параметру  $\mu$  (з них  $r_1$  по  $\gamma$ ,  $r_2$  по  $\theta$ ,  $r_3$  по  $\lambda$ ), то існують неперервні похідні  $D^m, D^{m_1}, D^{m_2}, D^p G_0(t, R; \tau, S, \mu)$ ,  $p = 1, \dots, l$ , і справедлива оцінка:

$$\left| D_x^{m_1} D_y^{m_2} D_z^{m_3} D_\mu^p G_0(t, R; \tau, S; \mu) \right| \leq C \exp\{-c_1\rho(t, R; \tau, S)\} (t-\tau)^{-(n+m_1+m_2+m_3+m_p)/2}. \quad (18)$$

Ця властивість доводиться методом математичної індукції при  $p=0$ , для ф.р.  $G_0(t, R; \tau, S, \mu)$  справедлива оцінка (18).

Візьмемо  $|\rho| < l$ , використаємо, що  $\tilde{G}_0(t, R; \tau, S, \mu) = D_\mu^{q-1} G_0(t, R; \tau, S, \mu)$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial t} - \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^r y_i \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial z_i} = \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(t, \mu) \frac{\partial^2 \tilde{G}_0}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, \mu) \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial x_i} + c(t, \mu) \tilde{G}_0 + \\ + \sum_{k,j=1, i=1, v=1}^n \sum_{v=1}^{q-1} c_{k,j,i}^{v-1} (a_{k,i}^{(v)}(t, \mu) D_\mu^{q+1-v} \frac{\partial^2 \tilde{G}_0}{\partial x_k \partial x_j} + b_i^{(v)}(t, \mu) D_\mu^{q+1-v} \frac{\partial \tilde{G}_0}{\partial x_i} + c_{k,i}^{v-1}(t, \mu) D_\mu^{q+1-v} G_0), \\ \tilde{G}_0(t, R; \tau, S, \mu)|_{t=\tau} = 0. \quad (19)$$

Оскільки  $D_\mu^v \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_k \partial x_j}$  - аналітична функція, то по  $R$  вона нескінченно диференційовна.

$$\tilde{G}_0(t, R; \tau, S, \mu) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{R_k} G_0(t, R; \beta, S', \mu) \left[ \sum_{k,i=1}^n \left( \sum_{v=1}^{q+1} G_{q-v}^{(v)} \left( D_\mu^v a_{ki}(\beta, \mu) \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_i \partial x_k}(\beta, \tau; S', S, \mu) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^n D_\mu^v b_j(\beta, \mu) D_\mu^{q+1} \frac{\partial G_0(\beta, S', \tau, S)}{\partial x_j} + D_\mu^v c(\beta, \mu) D_\mu^{q+1-v} G_0(\beta, S', \tau, S, \mu) \right) \right] dS'. \quad (20)$$

Оцінимо  $\tilde{G}_0(t, R; \tau, S, \mu)$ . При цьому інтеграл  $\int_{\tau}^t$  розіб'ємо на інтеграли точкою  $\frac{t+\tau}{2}$ . В інтегралі  $\int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}$  врахуємо, що

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 G_0}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \text{ якщо } x \text{ не зв'язане з } y. \text{ Якщо } x_i \text{ зв'язане з } y, \text{ то} \\ \frac{\partial G_0}{\partial x_i} = -\frac{\partial G_0}{\partial \xi_i} + \frac{\partial G_0(\beta-\tau)}{\partial \eta_i} \frac{1}{2}, \text{ тому одержимо (20).}$$

Аналогічно доводиться така властивість. Якщо коефіцієнти рівняння (17) задовольняють умову Гьольдера з показником  $\alpha$ , то  $|D_\mu^q [G_0(t, R; \tau, S, \mu) - G_0(t, R; \tau, S, \mu')]| \leq C_m |\mu - \mu'|^\alpha (t-\tau)^{-(n+|q_1|+3|q_2|+5|q_3|)/2} \times \exp\{-c_1\rho(t, R; \tau, S)\}.$  (21)

Дійсно, взявши рівняння (17) при різних параметрах  $\mu, \mu'$ , утворимо різницю цих рівнянь і одержимо:

$$\frac{\partial \Delta G_0}{\partial t} - \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial \Delta G_0}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^r y_i \frac{\partial \Delta G_0}{\partial z_i} = \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(t, \mu) \frac{\partial^2 \Delta G_0}{\partial x_k \partial x_j} + \\ + \sum_{k=1}^n b_k(t, \mu) \frac{\partial \Delta G_0}{\partial x_k} + c(t, \mu) \Delta G_0 + \sum_{k,i=1}^n (a_{ki}(t, \mu) - a_{ki}(t, \mu')) \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_k \partial x_i} + \\ + \sum_{k=1}^n (b_k(t, \mu) - b_k(t, \mu')) \frac{\partial G_0}{\partial x_k} + (c(t, \mu) - c(t, \mu')) G_0(t, R; \tau, S, \mu').$$

причому  $\Delta G_0(t, R; \tau, S, \mu)|_{t=\tau} = 0$ . Тому

$$\Delta G(t, R; \tau, S) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{R_k} G_0(t, R; \beta, S', \mu) \left( \sum_{k,j=1}^n (a_{kj}(t, \mu) - a_{kj}(t, \mu')) \frac{\partial^2 G_0(\beta, S', \tau, S, \mu')}{\partial \xi_k' \partial \xi_j'} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n (b_k(t, \mu) - b_k(t, \mu')) \frac{\partial G_0(\beta, S', S, \mu')}{\partial \xi_k'} + (c(t, \mu) - c(t, \mu')) G_0(\beta, S', \tau, S, \mu') \right) dS'.$$

Оскільки  $\int \frac{\partial^2 G_0}{\partial \xi \partial \xi} d\xi, d\xi = 0$ , а

$$\Delta_x G_0 = G_0(t, R; \tau, S, \mu) - G_0(t, R; \tau, S', \mu) = \frac{\partial}{\partial \xi'} G_0(t, R; S' + \Delta S', \mu) | S - S' |$$

всі інтеграли існують і справедлива оцінка (21) при  $q=0$ . Аналогічно поступаємо при  $q>0$ . При цьому враховуємо, що  $G_0(t, R; \tau, S, \mu)$  - аналітична функція по  $R$  і  $S$ . Інтегрування частинами, з використанням оцінок для похідних  $G_0(t, R; \tau, S, \mu)$ , одержимо (21).

З цих властивостей випливає, що  $K(t, R; \tau, S, \mu)$  має неперервні похідні по  $(\psi, \zeta)$  і по  $(\eta, \zeta)$ . Використовуючи цей факт, легко встановити, що  $\varphi(t, R; \tau, S)$  має неперервні похідні по  $(\psi, \zeta)$ . Тому ф.р. задачі Коші дається формулою (4), при цьому справедливі оцінки:  $|D'_x Z(t, R; \tau, S)| \leq C(t - \tau)^{-(n+5r+3m+|q|)/2} \exp\{-c_1 \rho(t, R; \tau, S)\}$ ,

$$|D_x Z(t, R; \tau, S)| \leq C(t - \tau)^{-(n+5r+3m+3)/2} \exp\{-c_1 \rho(t, R; \tau, S)\},$$

$$|D_z Z(t, R; \tau, S)| \leq C(t - \tau)^{-(n+5r+3m+5)/2} \exp\{-c_1 \rho(t, R; \tau, S)\},$$

де  $C, c_1 > 0$ .

1. Ильин А.М. Об одном классе ультрапараболических уравнений // ДАН СССР. - Т.159. - 1964. - №6. - С.1214-1217.
2. Kolmogoroff A.N. Zufllige Bewegungen // Ann. of math. - vol. 35. - 1934. - S.116-117.
3. Weber M. The fundamental solution of degenerate partial differential equation of parabolic type // Trans. Amer. Math. - Soc. 71. - 1951. - S.24-37.

## КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПАРАМЕТРОМ

У цій статті розглядаються крайові задачі для рівняння

$$(\lambda + 1)y''(t) + \lambda y(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \lambda \neq -1.$$

Його вивчення пов'язане з дослідженням диференціально-операторного рівняння  $(A+E)y''(t) + Ay(t) = f(t)$  в гільбертовому просторі  $H$ .

Одержано умови існування та представлення розв'язків крайових задач.

In this note we consider boundary value problems for the equation

$$(\lambda + 1)y''(t) + \lambda y(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \lambda \neq -1.$$

Its studying is connected with the investigation of the differential-operator equation  $(A+E)y''(t) + Ay(t) = f(t)$  in a Hilbert space  $H$ .

We have received conditions of the existence and the representation of solutions of boundary value problems.

Розглянемо рівняння:

$$L[y] = (\lambda + 1)y''(t) + \lambda y(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

де  $\lambda \neq -1$  - довільний дійсний параметр,  $f(t)$  - неперервна на  $[0, T]$  функція. Його вивчення пов'язане із дослідженням диференціально-операторного рівняння

$$(A + E)y''(t) + Ay(t) = f(t), \quad (2)$$

задача Коші для якого аналізувалась в роботах [2],[4]. У випадку, коли  $A$  - деяке самоспряжене розширення мінімального оператора для  $-\frac{d^2}{dx^2}$  в  $L_2(a, b)$ , (2) є рівнянням одномірних коливань ідеальної стратифікованої рідини (див. [1]).

Задамо крайові умови виду:

$$a_1 y'(0) + b_1 y(0) = 0, \quad (3)$$

$$a_2 y'(T) + b_2 y(T) = 0, \quad (4)$$

де  $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ ,  $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ .

Розв'язком крайової задачі (1),(3),(4) будемо називати неперервно диференційовану на  $[0, T]$  функцію, яка має неперервну другу похідну на  $(0, T)$ , задовільняє на  $(0, T)$  рівняння (1) і крайові умови (3),(4).

Поряд з (1) розглядаємо також однорідне рівняння:

$$L[y] = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Згідно з [3], одержуємо такі представлення розв'язків крайової задачі (1),(3),(4):

а) якщо задача (5),(3),(4) не має нетривіальних розв'язків, то задача (1),(3),(4) має єдиний розв'язок:

$$y(t) = \frac{y_2(t)}{c} \cdot \int_0^t f(\tau) y_1(\tau) d\tau + \frac{y_1(t)}{c} \cdot \int_t^T f(\tau) y_2(\tau) d\tau, \quad (6)$$

де  $y_1(t)$  - розв'язок задачі (5),(3),  $y_2(t)$  - розв'язок задачі (5),(4),

$$c = (\lambda + 1) \cdot \begin{vmatrix} y_1(\tau) & y_2(\tau) \\ y_1'(\tau) & y_2'(\tau) \end{vmatrix}_t$$

б) якщо задача (5),(3),(4) має нетривіальний розв'язок  $\varphi_0(t)$  і не має інших лінійно незалежних з ним розв'язків, то для розв'язності задачі (1),(3),(4) необхідно, щоб

$$\int_0^T f(\tau) \varphi_0(\tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

При цьому  $y(t) = \bar{y}(t) + c\varphi_0(t)$ , де  $\bar{y}(t)$  - один із розв'язків (1),(3),(4),  $c$  - довільна стала. У зв'язку з цим для виділення єдиного розв'язку будемо накладати додаткову умову:

$$\int_0^T y(\tau) \varphi_0(\tau) d\tau = 0. \quad (8)$$

При виконанні (7) задача (1),(3),(4) має єдиний розв'язок  $y(t)$ , який задовільняє (8), і представляється у вигляді:

$$y(t) = \int_0^t (\varphi(\tau, t) + c_1(t) \bar{\varphi}(\tau)) f(\tau) d\tau - \bar{\varphi}(t) \cdot \int_0^t \varphi_0(\tau) f(\tau) d\tau - \varphi_0(t) \cdot \int_t^T \bar{\varphi}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (9)$$

де  $\varphi(\tau, t)$  - розв'язок рівняння  $L_t[\varphi] = -\varphi_0(\tau) \varphi_0(t)$ ,  $\bar{\varphi}(t)$  - розв'язок рівняння (5), який не задовільняє (3),  $\int_0^T \varphi_0^2(\tau) d\tau = 1$ ,  $\left| \frac{\bar{\varphi}(t)}{\varphi'(t)} \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0'(t)} \right| = \frac{1}{\lambda + 1}$ ,

$$c_1(t) = -\frac{\alpha_1 \varphi_0'(0, t) + \beta_1 \varphi_0(0, t)}{\alpha_1 \bar{\varphi}'(0) + \beta_1 \bar{\varphi}(0)}$$

Зауважимо, що надалі ми будемо використовувати позначення  $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 1}}$ , а вираз виду  $\frac{\sin \omega \alpha}{\omega}$  вважатимемо визначеним і при  $\omega = 0$ , вважаючи його в такому випадку рівним  $\alpha$ .

Враховуючи, що перевірка на наявність нетривіальних розв'язків задачі (5),(3),(4) та знаходження функцій  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi(\tau, t)$ ,  $\bar{\varphi}(t)$  не становлять принципових труднощів, обмежимося тільки формулюванням умов існування та представлення розв'язків відповідних крайових задач.

### 1. Перша крайова задача.

Запишемо крайові умови у вигляді:

$$y(0) = y(T) = 0. \quad (10)$$

**Теорема 1.** Якщо  $\frac{\sin \omega T}{\omega} \neq 0$ , то, при довільній неперервній на  $[0, T]$  функції  $f(t)$ , задача (1),(10) має єдиний розв'язок

$$y(t) = \frac{1}{\lambda + 1} \left[ \frac{\sin \omega(t - T)}{\sin \omega T} \cdot \int_0^t f(\tau) \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\tau + \frac{\sin \omega t}{\sin \omega T} \cdot \int_t^T f(\tau) \frac{\sin \omega(\tau - T)}{\omega} d\tau \right].$$

Зокрема, при  $\omega = 0$  одержимо:

$$y(t) = \frac{t - T}{T} \int_0^t f(\tau) d\tau + \frac{t}{T} \int_t^T f(\tau) d\tau.$$

Якщо ж  $\frac{\sin \omega T}{\omega} = 0$ , то розв'язки задачі (1),(10) існують лише за умови  $\int_0^T f(\tau) \sin \omega \tau d\tau = 0$ , причому єдиний розв'язок  $y(t)$ , для якого

$\int_0^T y(\tau) \sin \omega \tau d\tau = 0$  має вигляд:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda + 1} \left[ \frac{\sin \omega t}{\omega T} \cdot \int_0^T f(\tau) \cdot \tau \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \cdot \int_0^T f(\tau) \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\tau - \frac{\sin \omega t}{\omega} \int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]$$

### 2. Друга крайова задача.

Запишемо крайові умови у вигляді

$$y'(0) = y'(T) = 0. \quad (11)$$

**Теорема 2.** Якщо  $\sin \omega T \neq 0$ , то, при довільній неперервній на  $[0, T]$  функції  $f(t)$ , задача (1), (11) має єдиний розв'язок

$$y(t) = \frac{1}{(\lambda + 1)\omega \sin \omega T} \left[ \cos \omega(t - T) \cdot \int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \cos \omega t \cdot \int_0^T f(\tau) \cos \omega(\tau - T) d\tau \right].$$

Якщо ж  $\sin \omega T = 0$ , то розв'язки задачі (1), (11) існують лише за умови  $\int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 0$ , причому єдиний розв'язок  $y(t)$ , для якого

$\int_0^T y(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 0$ , має вигляд:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda + 1} \left[ -\frac{\cos \omega t}{2T} \cdot \int_0^T f(\tau) \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\tau + \frac{\sin \omega t}{\omega} \cdot \int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \cos \omega t \cdot \int_0^T f(\tau) \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\tau \right]$$

Зокрема, при  $\omega = 0$  умова існування розв'язків -  $\int_0^T f(\tau) d\tau = 0$ , а

$y(t) = -\frac{1}{2T} \int_0^T \tau^2 f(\tau) d\tau + t \cdot \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_0^T \tau f(\tau) d\tau$  - єдиний розв'язок, для якого

$\int_0^T y(\tau) d\tau = 0$ .

### 3. Третя крайова задача.

Розглянемо тепер крайові умови (3), (4) у загальному вигляді.

Нехай  $\Delta = (\alpha_1 \alpha_2 \omega^2 + \beta_1 \beta_2) \frac{\sin \omega T}{\omega} - (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) \cos \omega T$ .

**Теорема 3.** Якщо  $\Delta \neq 0$ , то, при довільній неперервній на  $[0, T]$  функції  $f(t)$ , задача (1), (3), (4) має єдиний розв'язок -

$$y(t) = \frac{1}{(\lambda + 1)\Delta} \left[ u_2(t - T) \cdot \int_0^T u_1(\tau) f(\tau) d\tau + u_1(t) \cdot \int_0^T u_2(\tau - T) \cdot f(\tau) d\tau \right],$$

де  $u_k(t) = \beta_k \frac{\sin \omega t}{\omega} - \alpha_k \cos \omega t$ ,  $k = \overline{1, 2}$ .

Зокрема, при  $\omega = 0$  одержимо:

$$y(t) = \frac{1}{\beta_1 \beta_2 T - \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2} \left[ (\beta_2(t - T) - \alpha_2) \int_0^T (\beta_1 \tau - \alpha_1) f(\tau) d\tau + (\beta_1 t - \alpha_1) \times \int_0^T (\beta_2(\tau - T) - \alpha_2) f(\tau) d\tau \right].$$

Якщо ж  $\Delta = 0$ , то розв'язки задачі (1), (3), (4) існують лише за умови, що  $\int_0^T u_1(\tau) f(\tau) d\tau = 0$ , причому єдиний розв'язок  $y(t)$ , для якого

$\int_0^T u_1(\tau) y(\tau) d\tau = 0$ , має вигляд:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda + 1} \left[ \frac{c_0^2 u_1(t)}{2} \cdot \int_0^T \left[ \beta_1 \frac{\tau \cos \omega \tau - \frac{\sin \omega \tau}{\omega}}{\omega^2} + \alpha_1 \tau \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \right] f(\tau) d\tau - \frac{\sin \omega t}{\omega} \times \int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \frac{\sin \omega t}{\omega} \cdot \int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \cos \omega t \int_0^T f(\tau) \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\tau \right],$$

де  $c_0^2 = \left( \int_0^T u_1^2(\tau) d\tau \right)^{-1}$ .

Зокрема, при  $\omega = 0$  умова існування розв'язків є такою:

$$\int_0^T (\beta_1 \tau - \alpha_1) f(\tau) d\tau = 0, \quad \text{а}$$

$$y(t) = \frac{\beta_1 t - \alpha_1}{2T(\beta_1^2 T^2 - 3\beta_1 \alpha_1 T + 3\alpha_1^2)} \int_0^T (3\alpha_1 \tau^2 - \beta_1 \tau^3) f(\tau) d\tau - t \int_0^T f(\tau) d\tau + t \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_0^T \tau f(\tau) d\tau$$

- єдиний розв'язок, для якого  $\int_0^T (\beta_1 \tau - \alpha_1) y(\tau) d\tau = 0$ .

Зауважимо, що, покладаючи в теоремі 3  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , одержимо результат теоремі 1, а взявши  $b_1 = b_2 = 0$ , будемо мати результат теоремі 2.

Зауважимо також, що при  $\Delta = 0$  праві частини у формулах для представлення розв'язків можуть бути дещо спрощені за рахунок другого і третього доданків. Їх записано в такому вигляді з метою збереження форми (9). Зокрема, при  $b_1 = b_2 = 0$  другі доданки в цих формулах дорівнюють нулю.

1. Габов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_x - u) + u_x = 0$  и некоторых связанных с ним задачах // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. - 1986. - Т.26. - №1. - С.92-102.
2. Горбачук М.Л., Федак И.В. Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированной жидкости // Докл. АН СССР. - 1987. - Т.297. - №1. - С.14-17.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1980. - 232 с.
4. Федак И.В. О корректной разрешимости задачи Коши для неоднородного дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированной жидкости: Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений. - К.: Ин-т мат. АН УССР, 1986. - С.53-57.

Л.С.Возняк

## ПРО ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

У роботі розглядається збіжність методу послідовних наближень для операторних рівнянь з малою нелінійністю в банаховому просторі. Формулюються і доводяться теореми збіжності для випадку, коли спектральний радіус лінійного оператора, що входить в праву частину операторного рівняння, є більшим за одиницю. Будуються збіжні до розв'язку рівняння послідовності.

*In the present paper a convergence of the successive approximations for the operator's equations with a vanish nonlinearity in the Banach's space has been investigated. The convergences theorems, in the case of the spectral radius of the linear operator in the right side of the operator's equation is greatest then 1, has been proved. A convergencing series to the equation's solutions has been found.*

1. В цій роботі розглядається збіжність методу послідовних наближень для рівняння

$$x = Bx + R(\lambda, x) \quad (1)$$

з лінійним цілком неперервним оператором  $B$ , який діє в банаховому просторі, і нелінійним оператором  $R(\lambda, x)$ , що задовольняє умову

$$\|R(\lambda, x_1) - R(\lambda, x_2)\| \leq q(\lambda) \|x_1 - x_2\|, \quad (2)$$

де  $q(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Відомо (див., наприклад, [1]-[2]), що умова  $\rho(B) < 1$  є необхідною і достатньою умовою збіжності послідовних наближень  $x_{n+1} = Bx_n + f$  до елемента  $(I-B)^{-1}f$ , і ця збіжність є рівномірною відносно  $x_0$  і  $f$ . Тут  $\rho(\bullet)$  - спектральний радіус відповідного лінійного оператора. Виявляється, якщо виконується умова (2), нерівність  $\rho(B) < 1$  є достатньою і для збіжності рекурентної послідовності

$$x_{n+1} = Bx_n + R(\lambda, x_n) \quad (3)$$

і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$ , де  $x$  - розв'язок рівняння (1).

Для доведення цього факту використаємо поняття еквівалентної норми. Нагадаємо (див. [2]), що норми  $\|\cdot\|$  і  $\|\cdot\|_0$  називаються еквівалентними, коли  $\|x\| \leq \|x\|_0 \leq C(\varepsilon)\|x\|$ ,  $x \in E$ , де

$$C(\varepsilon) \geq 1. \quad (4)$$

При переході до еквівалентних норм збіжні послідовності елементів простору залишаються збіжними, замкнуті множини залишаються замкнутими, відкриті - відкритими і т.д. Відомо також (див. [2]), що при переході до еквівалентної норми спектральний радіус не міняється, а якщо оператор задовольняє в деякій нормі умову Ліпшица, то при переході до еквівалентної норми він також задовольняє цю умову, але з іншою константою.

Покажемо цю властивість для оператора  $R(\lambda, x)$ . Дійсно, переходячи до еквівалентної норми, для  $R(\lambda, x)$  маємо  $\|R(\lambda, u) - R(\lambda, v)\|_0 \leq C(\varepsilon)\|R(\lambda, u) - R(\lambda, v)\|$ , звідки, враховуючи (2), запишемо:

$$\|R(\lambda, u) - R(\lambda, v)\|_0 \leq C(\varepsilon)q(\lambda)\|u - v\|, \quad (5)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} C(\varepsilon)q(\lambda) = 0, \quad (6)$$

що і треба довести.

Отже, для оператора  $Nx = Bx + R(\lambda, x)$  в новій нормі  $\|\cdot\|_0$  виконується умова Ліпшица з константою  $LipN = \|B\|_0 + C(\varepsilon)q(\lambda)$ . Таким чином, якщо виконується нерівність  $LipN < 1$ , то за принципом Каччополі-Банаха послідовні наближення (3) збігаються до єдиного розв'язку  $x \in E$  рівняння (1).

**Теорема 1.** Для збіжності наближень (3) до єдиного розв'язку  $x \in E$  рівняння (1) при  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q(\lambda) = 0$  достатньо, щоб виконувалася умова

$$\rho(B) < 1. \quad (7)$$

**Доведення.** Нехай виконується умова (7). Тоді завжди можна вказати таке додатне число  $\varepsilon > 0$ , що виконуватиметься і нерівність

$$\rho(B) + \varepsilon < 1. \quad (8)$$

Побудуємо в просторі  $E$  норму, еквівалентну початковій. Для цього визначимо таке  $n$ , що  $\sqrt[n]{\|B^n\|} \leq \rho + \varepsilon$ , де  $\rho = \rho(B)$ , і означимо

$$\|x\|_n = \|x\| + (\rho + \varepsilon)^{-1}\|Bx\| + (\rho + \varepsilon)^{-2}\|B^2x\| + \dots + (\rho + \varepsilon)^{1-n}\|B^{n-1}x\|. \quad (9)$$

Нехай  $\|Bv\| \leq \rho\|v\|$ ,  $\forall v \in E$ . Очевидно,

$$\|x\| \leq \|x\|_n \leq (1 + (\rho + \varepsilon)^{-1}\|B\| + (\rho + \varepsilon)^{-2}\|B^2\| + \dots + (\rho + \varepsilon)^{1-n}\|B^{n-1}\|)\|x\| \leq C(\varepsilon)\|x\|, \text{ де}$$

$$C(\varepsilon) = 1 + (\rho + \varepsilon)^{-1}\rho + (\rho + \varepsilon)^{-2}\rho^2 + \dots + (\rho + \varepsilon)^{1-n}\rho^{n-1}.$$

Використовуючи введenu норму (9), одержимо:

$$\|Bx\|_n = \|Bx\| + (\rho + \varepsilon)^{-1}\|B^2x\| + (\rho + \varepsilon)^{-2}\|B^3x\| + \dots + (\rho + \varepsilon)^{1-n}\|B^n x\| \leq (\rho + \varepsilon)\left[(\rho + \varepsilon)^{-1}\|Bx\| + (\rho + \varepsilon)^{-2}\|B^2x\| + (\rho + \varepsilon)^{-3}\|B^3x\| + \dots + \|x\|\right] = (\rho + \varepsilon)\|x\|_n,$$

звідки, згідно з означенням норми оператора, впливає справедливості нерівності  $\|B\|_n \leq \rho(B) + \varepsilon$ . Оцінюючи константу Ліпшица для оператора  $N$ , маємо:  $LipN \leq \rho(B) + \varepsilon + C(\varepsilon)q(\lambda)$ . А оскільки мають місце співвідношення (8) і (6), то виконується умова  $LipN < 1$ , яка гарантує збіжність наближень (3) до єдиного розв'язку  $x \in E$  рівняння (1), що і треба довести.

**2.** В цьому пункті розглянемо питання, чи можливо побудувати збіжні до розв'язку рівняння (1) послідовності у випадку, коли  $\rho(B) \geq 1$ . У зв'язку з цим перетворимо рівняння (1) таким чином:  $x - PBx = QBx + R(\lambda, x)$ , де  $P$ -оператор проектування на деякий підпростір  $E_0 \in E$ ,  $Q = I - P$ . Якщо існує  $(I - PB)^{-1}$ , то

$$x = (I - PB)^{-1}QBx + (I - PB)^{-1}R(\lambda, x). \quad (10)$$

Побудуємо ітерації за формулами

$$x_{n+1} = M'x_n + F(\lambda, x_n), \quad (11)$$

де  $M'u = (I - PB)^{-1}QB u$ ,  $F(\lambda, u) = (I - PB)^{-1}R(\lambda, u)$ .

Враховуючи еквівалентність рівнянь (10) і (1) та використовуючи *теорему 1*, при виконанні умови  $\rho(M') < 1$ , стверджуємо, що існує оператор  $(I - B)$ , і послідовні наближення (11) збігаються до єдиного розв'язку  $x \in E$  рівняння (1). Але оскільки  $(I - PB)^{-1}QB = (I - PB)^{-1}QQB$ , то, враховуючи відому властивість спек-

тального радіуса  $\rho(AB) = \rho(BA)$ , одержимо  $\rho(M') = \rho(L)$ , де  $L = QB(I-PB)^{-1}Q$ . Отже, справедлива наступна *теорема*.

**Теорема 2.** Нехай існує  $(I-PB)^{-1}$  і виконується нерівність (2). Тоді достатньою умовою збіжності ітерацій (11) до єдиного розв'язку рівняння (1) при  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q(\lambda) = 0$  є виконання умови  $\rho(\lambda) < 1$ .

**Зауваження.** Оскільки справедливі співвідношення  $\rho(L) \leq \|L\| \leq q$ , то достатньою умовою збіжності методу (11) є в умовах *теорема 2* досить проста для практичного використання умова  $q < 1$ .

Викладені в цьому пункті міркування можна застосувати і в тих випадках, коли рівняння можна розв'язувати методом послідовних наближень без всяких попередніх його перетворень. Це дозволяє конструювати швидко збіжні послідовні наближення.

**3.** Для використання *теорема 2* потрібно, по-перше, мати скінченномірний простір  $E$  такий, що в ньому існує  $(I-PB)^{-1}$ , і, по-друге, з'ясувати, в яких випадках виконуватиметься достатня умова збіжності  $q < 1$ .

Наведені нижче міркування дозволяють вибрати такий підпростір у випадку, коли задано послідовність скінченномірних просторів  $E_n$ , об'єднання яких щільне в  $E$ .

Отже, нехай задано послідовність підпросторів  $E_n$ , а  $P_n$ ,  $n=1,2,\dots$ , - деякі проектори на  $E_n$ . Тоді природно за  $E$  і відповідний проектор  $P$  взяти один із просторів  $E_n$  і проектор  $P_n$ , який йому відповідає. Зауважимо, що в такому випадку побудова оператора  $(I-P_nB)^{-1}$  вимагає розв'язування скінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Припустимо, що  $P_n$  сильно збігається до одиничного оператора, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x, x \in E$ . Оскільки  $B$  - цілком неперервний оператор, то звідси випливає (див., наприклад, [2]):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n B - B\| = 0$ . Таким чином, при достатньо великих  $n$  оператор  $I-P_nB$  стає по нормі близьким до оператора  $I-B$ . Якщо для остан-

нього існує обернений оператор, то, згідно з відомою теоремою (див. [2]), існують обернені оператори і для  $I-P_nB$ .

Для відповіді на друге питання цього пункту зауважимо, що із означення оператора  $L_n$  випливає нерівність:

$$q_n = \|L_n\| \leq \|B - P_n B\| \cdot \|(I - PB)^{-1}\| \cdot \|I - P_n\|.$$

Другий і третій множники в правій частині останнього співвідношення є обмеженими послідовностями, а перший співмножник прямує до нуля, оскільки  $P_n B \rightarrow B$ . Отже, існує таке  $n$ , починаючи з якого  $q_n < 1$ . Тому справедлива наступна *теорема*.

**Теорема 3.** Нехай оператор  $I-B$  існує і неперервний,  $P_n \rightarrow I$  сильно в  $E$ , виконується нерівність (2),  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q(\lambda) = 0$ . Тоді існує такий номер  $n$ , при якому виконується нерівність  $Lip N < 1$ , яка гарантує збіжність ітерацій (11) до єдиного розв'язку рівняння (1).

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Физматгиз, 1977. - 741 с.
2. Приближенное решение операторных уравнений /Авт.: Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П. и др. - М.: Наука, 1969. - 456 с.

## БАГАТОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

На основі метричного підходу досліджено питання класичної коректності багатоточкової задачі для еліптичного рівняння 4-го порядку. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

By using the metric approach the question of classical correctness of the multipoint problem for four order elliptic equation with constant coefficients are investigated. Metric theorems on estimates of small denominators from below, which appear in the construction of solution, are proved.

У деяких задачах математичної фізики і прикладної математики виникає необхідність відшукання розв'язку диференціального рівняння у випадку, коли не всі початкові умови задані в одній і тій же точці. Задачі такого типу отримали назву багатоточкових крайових задач.

Систематичне дослідження таких задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними почалося порівняно недавно. Це пояснюється, очевидно, тим, що багатоточкові крайові задачі є, взагалі кажучи, некоректними, а питання про їх розв'язність у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників.

Це показано, зокрема, у роботах [1-6], в яких досліджується аналог n-точкової задачі (за часовою змінною) для рівнянь гіперболічного типу; встановлено умови існування, єдиності і неперервної залежності від правих частин рівнянь і граничних умов розв'язків розглядуваних задач у відповідних функціональних просторах, які, як правило, формулюються у теоретико-числових термінах; одержано явні формули для розв'язків у вигляді рядів за системами ортогональних функцій. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач.

Питання єдиності розв'язків локальної та нелокальної багатоточкових задач у нескінченному шарі для лінійної системи рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами досліджено у роботах [7,8].

У роботі [9] досліджена багатоточкова задача для диференціального рівняння з частинними похідними четвертого порядку. Встановлено, що при деяких додаткових умовах на коефіцієнти Фур'є граничних функцій для розв'язку задачі можна отримати

оцінку умовної коректності гельдерового типу. Проте, зауважимо, що автор не розглядає класи граничних умов, які пов'язані з проблемою малих знаменників.

Дане дослідження є продовженням і розвитком роботи [9]. Як результат, знайдено умови коректної розв'язності багатоточкової задачі для безтипного диференціального рівняння четвертого порядку. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, із яких випливає однозначна розв'язність задачі для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, компоненти яких виражаються через параметри області і коефіцієнти граничних умов.

В області  $D = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$  розглянемо крайову задачу

$$N(u) = \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

$$M_j(u) = \sum_{r=0}^3 a_r \frac{\partial^r u(t, x)}{\partial t^r} = \varphi_j(x) \quad (j = \overline{1, 4}; a_r \in \mathbf{R}; 0 \leq t_1 < \dots < t_4 \leq T), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = u(t, l) = \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

Дослідимо спочатку задачу на власні значення

$$V^{(4)}(x) = \lambda^4 V(x), \quad (4)$$

$$V(0) = V^{(2)}(0) = V(l) = V^{(2)}(l) = 0 \quad (5)$$

Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$V(x) = \alpha \exp(\lambda x) + \beta \exp(-\lambda x) + \gamma \exp(i\lambda x) + \delta \exp(-i\lambda x). \quad (6)$$

Підставивши (6) в умови (5), одержимо систему рівнянь відносно сталих  $\alpha, \beta, \gamma$  і  $\delta$ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \\ \lambda^2(\alpha + \beta - \gamma - \delta) = 0, \\ \alpha \exp(\lambda l) + \beta \exp(-\lambda l) + \gamma \exp(i\lambda l) + \delta \exp(-i\lambda l) = 0, \\ \lambda^2(\alpha \exp(\lambda l) + \beta \exp(-\lambda l) - \gamma \exp(i\lambda l) - \delta \exp(-i\lambda l)) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник  $\Delta(\lambda) = -16i\lambda^4 \sinh(\lambda l) \sin(\lambda l)$  дорівнює нулю. Звідси, із системи (7) та формули (6) знайдемо, що власні значення задачі (4), (5)  $\lambda_k = \pi k/l, k \in \mathbf{N}$ , а відповідна їм повна система ортонормованих власних функцій має вигляд

$$\{V_k(x) = 1/\sqrt{2l} \sin(\pi k x/l), k \in \mathbf{N}\} \quad (8)$$

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) V_k(x). \quad (9)$$

Припустимо, що

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk} V_k(x), \quad j = \overline{1, 4}. \quad (10)$$

Підставляючи ряди (9) і (10) у рівняння (1) і умови (2), бачимо, що кожна з функцій  $u_k(t), k \in \mathbf{N}$ , є розв'язком такої багатоточкової задачі

$$u_k^{(4)}(t) = -\lambda_k^4 u_k(t), \quad (11)$$



$$\sum_{r=0}^3 a_r u_k^{(r)}(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = \overline{1,4}. \quad (12)$$

Для кожного  $k \in \mathbb{N}$  розв'язок задачі (11), (12) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{m=1}^4 C_m(k) \exp(\nu_m t), \quad (13)$$

де

$\nu_m \equiv \nu_m(k) = k\mu_m$ ;  $\mu_1 = \sqrt{2} \pi/(2l)(i+1)$ ;  $\mu_2 = -\sqrt{2} \pi/(2l)(i+1)$ ;  $\mu_3 = \sqrt{2} \pi/(2l)(i-1)$ ;  $\mu_4 = -\sqrt{2} \pi/(2l)(i-1)$ ; при цьому коефіцієнти  $C_q(k)$ ,  $q = \overline{1,4}$ , визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{m=1}^4 C_m(k) \gamma_m(k) \exp(\nu_m t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = \overline{1,4}, \quad (14)$$

де  $\gamma_m(k) = \sum_{r=0}^3 a_r \nu_m^r$ . Визначник  $\Delta^*(k)$  системи рівнянь (14) дорівнює

$$\Delta^*(k) = \prod_{m=1}^4 (\gamma_m(k) \det \|\exp(\nu_m t_j)\|_{m,j=1}^4) = \prod_{m=1}^4 (\gamma_m(k) \Delta(k))$$

При дослідженні питання єдиності розв'язку задачі (1)-(3) будемо користуватись однорідними умовами

$$\sum_{r=0}^3 a_r \frac{\partial^r u(t_j, x)}{\partial t^r} = 0 \quad j = \overline{1,4}, \quad (2')$$

$$\sum_{r=0}^3 a_r u_k^{(r)}(t_j) = 0, \quad j = \overline{1,4}. \quad (12')$$

**Теорема 1.** Для єдиності розв'язку задачі (1)-(3) у просторі  $C^4(D)$  необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$\gamma_m(k) \neq 0, \quad m = \overline{1,4}, \quad \Delta(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

**Доведення. Необхідність.** Якщо для деякого  $k_0 \in \mathbb{N}$  не виконуться хоч одна з умов (15), то задача (11), (12') має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u_{k_0}(t) = \sum_{m=1}^4 C_m(k_0) \exp(\nu_m(k_0)t),$$

де  $C_q(k_0)$ ,  $q = \overline{1,4}$ , – нетривіальний розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{m=1}^4 C_m(k_0) \gamma_m(k_0) \exp(\nu_m(k_0)t_j) = 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Тоді задача (1), (2') має нетривіальні розв'язки

$$\tilde{u}(t, x) = \sum_{m=1}^4 C_m(k_0) \exp(\nu_m(k_0)t) V_{k_0}(x),$$

і розв'язок неоднорідної задачі (1)-(3) (якщо він існує) не буде єдиним.

**Достатність.** Припустимо, що існують два розв'язки  $u_1(t, x), u_2(t, x)$  задачі (1)-(3) із простору  $C^4(D)$ . Тоді функція  $u(t, x) = [u_1(t, x) - u_2(t, x)] \in C^4(D)$  буде розв'язком однорідної задачі (1), (2') і разом з функціями  $N(u)$  і  $M_j(u)$ ,  $j = \overline{1,4}$ , розгортається в ряд Фур'є вигляду (9) за системою функцій (8); при цьому ряди для функцій  $N(u)$  і  $M_j(u)$ ,  $j = \overline{1,4}$ , співпадають із рядами, одержаними формальним застосуванням операторів  $N$  і  $M_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ , до ряду для функції  $u(t, x)$ . Із рівностей Парсеваля для функцій  $N(u)$  і

$M_j(u)$ ,  $j = \overline{1,4}$ , випливає, що кожний із коефіцієнтів Фур'є  $u_k(t)$  функції  $u(t, x)$  є розв'язком відповідної однорідної задачі (11), (12'). Якщо виконуються умови (15), то  $u_k(t) \equiv 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тоді з рівностей Парсеваля для функції  $u(t, x)$  випливає, що  $u(t, x) \equiv 0$ , тобто  $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$ .

Припустимо, що виконуються умови (15). Тоді коефіцієнти  $C_q(k)$ ,  $q = \overline{1,4}$ , однозначно визначаються зі системи рівнянь (14), а розв'язок задачі (1)-(3) формально зображається рядом

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m,j=1}^4 (\Delta_{jm}(k) \exp(\nu_m t) \varphi_{jk} (\gamma_m(k) \Delta(k))^{-1}) V_k(x), \quad (16)$$

де  $\Delta_{jm}(k)$  – алгебраїчне доповнення елемента  $\exp(\nu_m t_j)$  у визначнику  $\Delta(k)$ .

Ряд (16) може бути розбіжним, оскільки відмінні від нуля величини  $|\gamma_m(k)|$ ,  $m = \overline{1,4}$ , і  $|\Delta(k)|$  можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини  $k \in \mathbb{N}$ . Тому питання про існування розв'язку задачі (1)-(3) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Позначимо через  $A_s$ ,  $s > 0$ , – банахів простір аналітичних функцій вигляду  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k V_k(x)$ , для яких скінченна норма

$$\|\varphi\|_s = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \exp(sk).$$

**Теорема 2.** Нехай існують додатні сталі  $M_1, M_2, L$  і  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{N}$  такі, що для всіх (за винятком скінченного числа)  $k \in \mathbb{N}$  виконуються умови

$$|\Delta(k)| > M_1 k^{-(\xi_1 + \nu/2)} \exp(-Lk), \quad (17)$$

$$|\gamma_m(k)| > M_2 k^{-(\xi_2 + \nu/2)}, \quad m = \overline{1,4}, \quad (18)$$

де  $0 < \epsilon < 1$ , і нехай  $\varphi_j(x) \in A_{q_j}$ ,  $j = \overline{1,4}$ ,  $q > Q = \max\{L + \pi\sqrt{2}(2t_4 - t_1 - t_2)/(2l); (t_4 + t_3 - 2t_1)/(2l)\}$ . Тоді існує розв'язок задачі (1)-(3) із простору  $C^4(D)$ , який неперервно залежить від  $\varphi_j(x)$ ,  $j = \overline{1,4}$ .

**Доведення.** Із нерівностей (17) і (18) та формули (16) випливає оцінка

$$\|u(t, x)\|_{C^4(D)} \leq M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \left( k^{\xi_1 + \xi_2 + 4 + \epsilon} \sum_{j=1}^4 |\varphi_{jk}| \exp(Qk) \right).$$

Скориставшись елементарною нерівністю

( $\forall \omega \geq 0 \forall H(\omega) > 0$ )  $k^\omega \leq H(\omega) \exp(\theta k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , одержимо, що

$$\|u(t, x)\|_{C^4(D)} \leq M \sum_{j=1}^4 \|\varphi_j(x)\|_q,$$

звідки і випливає доведення теореми.

З'ясуємо, коли виконуються оцінки (17) і (18).

**Теорема 3.** Для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^4$ ) векторів  $\hat{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$  нерівності (17) виконуються для всіх (за винятком скінченного числа)  $k \in \mathbb{N}$  при  $\xi_1 = 6$  і  $L = 3\sqrt{2} \pi T/l$ .

**Доведення.** Визначник  $\Delta(k)$  запишемо в такому вигляді:

$$\Delta(k) = \det \|\exp(\nu_m t_j)\|_{m,j=1}^4 = \exp(\nu_1 t_4) g_1(k, \hat{t}).$$

Знайдемо

$$\frac{\partial g_1(k, \hat{t})}{\partial t_4} = k \sum_{j=2}^4 (\mu_j - \mu_1) \exp[(v_j - v_1)t_4] A_{4,j} = k \exp[(v_2 - v_1)t_4] g_2(k, \hat{t}),$$

де  $A_{m,j}$  – алгебраїчне доповнення елемента  $\exp(v_j t_m)$  у визначнику  $\Delta(k)$ . Аналогічно знайдемо функції

$$g_r(k, \hat{t}) = \sum_{j=r}^4 \prod_{q=1}^{j-1} (\mu_j - \mu_q) \exp[(v_j - v_r)t_4] A_{4,j}, \quad r = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Із (19) випливає, що

$$\frac{\partial g_3(k, \hat{t})}{\partial t_4} = k \prod_{q=1}^3 (\mu_4 - \mu_q) \exp[(v_4 - v_3)t_4] A_{4,4} = k \exp[(v_4 - v_3)t_4 + v_1 t_3] g_4(k, \hat{t})$$

Продовжуючи цей процес, побудуємо функції

$$g_{3+r}(k, \hat{t}) = \prod_{q=1}^3 (\mu_4 - \mu_q) \sum_{j=r}^3 \prod_{q=1}^{j-1} (\mu_j - \mu_q) \exp[(v_j - v_r)t_3] A_{3,j}, \quad r = 1, 2.$$

З останньої рівності одержуємо, що

$$\frac{\partial g_5(k, \hat{t})}{\partial t_3} = k \prod_{q=1}^3 (\mu_4 - \mu_q) \prod_{q=1}^2 (\mu_3 - \mu_q) \exp[(v_3 - v_2)t_3] A_{3,3} = k \exp[(v_3 - v_2)t_3 + v_1 t_2] \times \\ \times g_6(k, \hat{t}).$$

Тоді

$$\frac{\partial g_6(k, \hat{t})}{\partial t_2} = k \prod_{1 \leq p < q \leq 4} (\mu_q - \mu_p) \exp[(v_2 - v_1)t_2 + v_1 t_1]. \quad (20)$$

Із формули (20) випливає оцінка

$$\left| \frac{\partial g_6(k, \hat{t})}{\partial t_2} \right| = 16\pi^6 k l^6 \exp[\pi\sqrt{2}(t_1 - 2t_2)k/(2l)] > k \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

За нерівністю (21) інтервал  $[0, T]$  розбивається на підмножини (які, можливо, перетинаються)  $A_1$  і  $B_1$ ,  $A_1 \cup B_1 = [0, T]$ , такі, що

$$(\forall t_2 \in A_1) \quad \left| \operatorname{Re} \frac{\partial g_6(k, \hat{t})}{\partial t_2} \right| > k \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l]/\sqrt{2}, \quad (22)$$

$$(\forall t_2 \in B_1) \quad \left| \operatorname{Im} \frac{\partial g_6(k, \hat{t})}{\partial t_2} \right| > k \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l]/\sqrt{2}. \quad (23)$$

Покладемо  $\varepsilon_j = \varepsilon/(2(7-j))$ ,  $j = \overline{1, 6}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . На основі леми 2 із [10] для кожного з інтервалів множини  $A_1$  одержуємо оцінку

$$\operatorname{mes}\{t_2 : \left| \operatorname{Re} g_6(k, \hat{t}) \right| < k^{-1-\varepsilon_1} \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l]/\sqrt{2}\} \leq H_1 k^{-2-\varepsilon_1}, \quad (24)$$

де  $\operatorname{mes}M$  – міра Лебега множини  $M$ . Оскільки

$$\exp[-\pi\sqrt{2}(t_1 - 2t_2)k/(2l)] \operatorname{Re} \frac{\partial g_6(k, \hat{t})}{\partial t_2} = 16\pi^6 k l^6 \cos(\sqrt{2}(t_1 - 2t_2)k/(2l))$$

як функція аргумента  $t_2$  є періодична з періодом  $\sqrt{2}l/k$ , то число інтервалів множини  $A_1$  не перевищує  $H_2 k$ ,  $H_2 > 0$ . Отже,

$$\operatorname{mes}\{t_2 \in A_1 : \left| \operatorname{Re} g_6(k, \hat{t}) \right| < k^{-1-\varepsilon_1} \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l]/\sqrt{2}\} \leq H_3 k^{-1-\varepsilon_1}, \quad (25)$$

де  $H_3 = H_1 H_2$ .

Аналогічними міркуваннями з нерівності (23) одержуємо

$$\operatorname{mes}\{t_2 \in B_1 : \left| \operatorname{Im} g_6(k, \hat{t}) \right| < k^{-1-\varepsilon_1} \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l]/\sqrt{2}\} \leq H_4 k^{-1-\varepsilon_1}. \quad (26)$$

Із (25) і (26) випливає, що

$$\operatorname{mes}\{t_2 \in [0, T] : \left| g_6(k, \hat{t}) \right| < k^{-1-\varepsilon_1} \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l]\} \leq (H_3 + H_4) k^{-1-\varepsilon_1}. \quad (27)$$

Інтегруючи оцінку (27) за змінними  $t_1, t_3, t_4$  в кубі  $[0, T]^3$ , одержимо, що

$$\operatorname{mes}\{\hat{t} \in [0, T]^4 : \left| g_6(k, \hat{t}) \right| < k^{-1-\varepsilon_1} \exp[-\pi\sqrt{2}Tk/l]\} \leq H_5 k^{-1-\varepsilon_1}.$$

Аналогічно, переходячи послідовно від оцінки для  $|g_6(k, \hat{t})|$  до оцінки для  $|g_5(k, \hat{t})|$  і т.д., одержуємо, що оцінка

$$\left| g_1(k, \hat{t}) \right| < k^{-6-\varepsilon_1} \exp[-3\sqrt{2}\pi Tk/l]$$

справедлива для такої множини векторів  $\hat{t} \in [0, T]^4$  (позначимо її  $M(k)$ ), міра якої задовольняє оцінку

$$\operatorname{mes}M(k) < H k^{-1-\sigma}, \quad H > 0, 0 < \sigma < 1/2; \quad (28)$$

при цьому використовується той факт, що число інтервалів зміни компоненти  $t_s \in [0, T]$ ,  $s = 3, 4$ , на яких виконуються нерівності вигляду

$$\left| \operatorname{Re} \partial g_r(k, \hat{t}) / \partial t_s \right| > m(k) / \sqrt{2}, \quad r = \overline{1, 5}, \quad (29)$$

або

$$\left| \operatorname{Im} \partial g_r(k, \hat{t}) / \partial t_s \right| > m(k) / \sqrt{2}, \quad r = \overline{1, 5}, \quad (30)$$

не перевищує  $\operatorname{const} \cdot k$ . Підсумовуючи оцінку (28) за всіма  $k \in \mathbb{N}$ , одержимо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}M(k) < H \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\sigma}. \quad (31)$$

Оскільки ряд у правій частині нерівності (31) збігається, то на основі леми Бореля-Кантеллі [11] одержуємо, що для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbb{R}^4$ ) векторів  $\hat{t} \in [0, T]^4$  оцінка

$$\left| \Delta(k) \right| > k^{-6-\varepsilon_2} \exp[-3\sqrt{2}\pi Tk/l]$$

виконується для всіх (за винятком скінченного числа)  $k \in \mathbb{N}$ .

Залишається довести, що кількість інтервалів із  $[0, T]$ , на яких виконується нерівність (29) або нерівність (30), не перевищує  $\operatorname{const} \cdot k$ . Покажемо це, наприклад, у випадку  $s = 4$  і  $r = \overline{1, 3}$ ; для решти випадків доведення аналогічне.

Розглянемо функції, які задаються формулами (19). Очевидно,

$$\frac{\partial g_r(k, \hat{t})}{\partial t_4} = k \sum_{j=r+1}^4 \prod_{q=1}^{j-1} (\mu_j - \mu_q) \exp[(\mu_j - \mu_r)kt_4] A_{4,j};$$

$$v_r(k, t_4) \equiv \operatorname{Re} \frac{\partial g_r(k, \hat{t})}{\partial t_4} = k \sum_{j=r+1}^4 \exp[\operatorname{Re}(\mu_j - \mu_r)kt_4] \left\{ \operatorname{Re} \left( \prod_{q=1}^r (\mu_j - \mu_q) A_{4,j} \right) \cos[\operatorname{Im}(\mu_j - \mu_r)kt_4] - \operatorname{Im} \left( \prod_{q=1}^r (\mu_j - \mu_q) A_{4,j} \right) \sin[\operatorname{Im}(\mu_j - \mu_r)kt_4] \right\}.$$

Розглянемо функцію  $y_k(t_4) \equiv \partial/\partial t_4(v_r(k, t_4))$ . Вона зображається у вигляді

$$y_k(t_4) = \sum_{j=r+1}^4 \exp[\operatorname{Re}(\mu_j - \mu_r)kt_4] \{A_j(k) \cos[\operatorname{Im}(\mu_j - \mu_r)kt_4] + B_j(k) \sin[\operatorname{Im}(\mu_j - \mu_r)kt_4]\}$$

Оцінимо зверху кількість нулів на  $[0, T]$  цієї функції.

Функція  $y_k(t_4)$  має на інтервалі  $[0, T]$  стільки ж нулів, скільки і функція

$$\tilde{y}_k(z) = \sum_{j=r+1}^4 \exp[\operatorname{Re}(\mu_j - \mu_r)z] \{A_j(k) \cos[\operatorname{Im}(\mu_j - \mu_r)z] + B_j(k) \sin[\operatorname{Im}(\mu_j - \mu_r)z]\}$$

на інтервалі  $[0, kT]$ .

Зауважимо, що  $\tilde{y}_k(z)$  є розв'язком диференціального рівняння

$$\prod_{j=r+1}^4 \left( \frac{d^2 y}{dz^2} - 2\operatorname{Re}(\mu_j - \mu_r) \frac{dy}{dz} + |\mu_j - \mu_r|^2 \right) = 0 \quad (32)$$

Поряд і рівнянням (32) розглянемо рівняння

$$\prod_{j=r+1}^4 \left( \frac{d^2 y}{dz^2} - P \frac{dy}{dz} + |\mu_j - \mu_r|^2 \right) = 0, \quad (33)$$

де  $2|\operatorname{Re}(\mu_j - \mu_r)| \leq P$ .

Тоді за теоремою Валле-Пуссена [12] існує стала  $h_r > 0$  така, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння (33), а отже, і нетривіальний розв'язок рівняння (32), має на інтервалі довжини  $h_r$  не більше, ніж  $(7-2r)$  нулів. Тому число нулів функції  $\tilde{y}_k(z)$  на інтервалі довжини  $kT$  не перевищує  $T(7-2r)k/h_r$ . Це означає, що функція  $v_r(k, t_4)$  має на відрізку  $[0, T]$  не більше, ніж  $7-2r$  точок екстремума. Звідси випливає, що кількість інтервалів зміни величини  $t_4 \in [0, T]$ , на яких виконується нерівність (29) не перевищує  $\operatorname{const} k$ . У випадку нерівності (30) доведення аналогічне.

**Теорема 4.** Для майже всіх (відносно міри Лебега в  $\mathbf{R}^4$ ) векторів  $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^4$  нерівності (18) виконуються для всіх (за винятком скінченного числа)  $k \in \mathbf{N}$  при  $\xi_2 = 1$ .

**Доведення.** Позначимо через  $B$  множину тих векторів  $a$ , які належать деякому 4-мірному паралелепіпеду  $P_4 = [\alpha_0, \beta_0] \times P_3$ , для яких нерівність

$$|\gamma_m(k)| < k^{-1-\varepsilon^2}, \quad m = \overline{1, 4}, 0 < \varepsilon < 1 \quad (34)$$

має нескінченне число розв'язків  $k \in \mathbf{N}$ . Зафіксуємо  $k$  і  $a_1, a_2, a_3$ . Тоді для  $B_k(a_1, a_2, a_3)$  – множини тих  $a_0 \in [\alpha_0, \beta_0]$ , для яких виконується нерівність (34), справедлива оцінка

$$\operatorname{mes} B_k(a_1, a_2, a_3) < 2k^{-1-\varepsilon^2}. \quad (35)$$

Інтегруючи оцінку (35) по паралелепіпеду  $P_3$ , одержуємо, що міра множини  $B(k)$  тих векторів  $a \in P_4$ , для яких нерівності (34) виконуються при фіксованому  $k$ , задовольняє нерівність

$$\operatorname{mes} B(k) < 2Ck^{-1-\varepsilon^2}, \quad (36)$$

де  $C$  – об'єм паралелепіпеду  $P_3$ . Оскільки ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} 2Ck^{-1-\varepsilon^2}$  збігається, то із леми Бореля-Кантеллі [11] випливає, що  $\operatorname{mes} B = 0$ , тобто для майже всіх  $a \in P_4$  виконуються нерівності, протилежні нерівностям (34), для всіх (за винятком скінченного числа)  $k \in \mathbf{N}$ . Враховуючи, що простір  $\mathbf{R}^4$  можна покрити зчисленням числом паралелепіпедів  $P_4$ , одержуємо доведення теореми.

**Зауваження.** Результати роботи узагальнюються на випадок рівняння

$$\left( \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)^n = f(t, x).$$

1. Пташник Б.Й. Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп.АН УРСР. - 1966. - №10. - С.1254-1257.
2. Пташник Б.Й. n-лінійна задача для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. політехн. ін-ту. - 1967. - №16. - С.80-87.
3. Пташник Б.Й. Задача типу Валле-Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1967. - №2. - С.127-130.
4. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - К.: Наук. думка, 1984. - 264 с.
5. Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. - 1983. - 35, №6. - С.728-734.
6. Пташник Б.Й., Фіголь В.В., Штабальок П.І. Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Мат.студії. Праці Львів. мат. тов-ва. - 1991. - Вип.1. - С.16-32.
7. Антыпко И.И., Перельман М.А. О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. - 1972. - Вып.16. - С.98-109.
8. Борок В.М., Перельман М.А. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов: Математика. - 1973. - №8. - С.29-34.
9. Валицкий Ю.Н. Условная корректность четырехточечной задачи для одного дифференциального уравнения: Вопросы корректности обратных задач математической физики. - Новосибирск: Вычислит. центр Сибир. отделения АН СССР, 1982. - С.45-49.
10. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. - 1977. - Т.13. - №4. - С.637-645.
11. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. - М.: Наука, 1977. - 143 с.
12. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. - М.: Изд-во Иностран. лит., 1953. - Т.1. - 346 с.

Б.В.Атаманюк, О.М.Ворожук, Р.М.Чекайло

**ПОПОВНЕННЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ІТЕРАЦІЇ  
ДОСКОНАЛО МЕТРИЗОВАНОГО ФУНКТОРА  
ТА ПАРИ НЕСКІНЧЕННИХ ІТЕРАЦІЙ**

*У даній статті доведено дві теореми про геометричні властивості поповнення та пар коваріантних функторів.*

*Replenishment of infinite iteration of perfect metrizable functor and pairs of infinite iterations of covariant functors in this paper.*

Ідея дослідження нескінченних ітерацій належить В.В.Федорчуку. Перший автор статті розширив постановку такої задачі на некомпактний випадок і довів обидві теореми, другий і третій автори перевірили деякі технічні лема, що є матеріалами їх дипломних робіт.

Теорема 1. Простір  $F^{**}X$  гомеоморфний псевдовнутрішності  $s$ , де функтор  $F^{**}$  є поповненням функтора  $F^*$ , якщо виконуються наступні умови:

- 1) кожний простір  $F^n X$  гомеоморфний псевдовнутрішності  $s$ ,
- 2) кожний образ  $\eta_n(F^n X) \in z$  - множиною в просторі  $F^* X$ .
- 3) кожна породжена метризацією функтора  $F$  метрика  $d_n$  повна на просторі  $F^n X$ ,
- 4) кожне природне проектування  $\psi_{k+1,k}$  задовольняє умову сильної апроксимативної поліедральної  $n$ -м'якості,
- 5) простір  $F^* X$  є сильною  $z$ -множиною в кожному просторі  $F^{k+1} X, k \in N$ .

Доведення теореми 1. Використовуємо критерій Торунчика, згідно з яким досить перевірити виконання двох наступних умов: 1)  $F^{**}X \in AR(m)$ , 2) умова дискретної апроксимації замкнутими вкладеннями. Доведемо 1), використовуючи критерій Войди-

славського. Оскільки  $F^* X \in AR(m)$  то, згідно з критерієм Войди-славського, в просторі  $F^* X$  існує зліченна, всюди щільна множина  $A = \{a_i\}_{i \in N}$  та дві послідовності -  $C = \{C_j; j \in N\}$  та  $D = \{D_j; j \in N\}$  - таких підмножин, що для деякої індексації  $B = \{B_j\}_{j \in N}$  скінченних підмножин множини  $A$  виконуються наступні умови:

- 1)  $B_j \subset C_j$ ,
- 2)  $C_j$  стягується в точку по  $D_j$ ,
- 3) якщо  $B_j \subset B_{j'}$ , то  $D_j \subset D_{j'}$ ,
- 4) із збіжності  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{jk} \in F^* X$  випливає збіжність

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} D_{jk} \in F^* X$$

Оскільки  $A$  - всюди щільна множина в  $F^* X$ , то  $A$  - всюди щільна множина в поповненні  $F^{**}X$ , а умови 1)-3) зберігаються автоматично.

Нехай тепер  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{jk} \in F^{**}X$ .

Перевіряємо, чи виконується рівність  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} D_{jk}$

$$d(y, D_{jk}) \leq d(y, B_{jk}) + d(a_i, \psi(B_{jk})) + d(\psi(B_{jk}), D_{jk}).$$

Позначимо цю рівність (\*).

За означенням границі для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує  $N(\varepsilon)$ , що для будь-якого  $n \geq N(\varepsilon)$  вірно  $d(B_{jk}, y) < \varepsilon$ . Але  $B_{jk}$  - скінченна підмножина  $A$ , тому  $d(a_i, y) < \varepsilon$  для будь-якого  $a_i \in B_{jk}$ . Значить

$$\text{diam}(B_{jk}) \leq d(a_i, y) + d(a_k, y) < 2\varepsilon.$$

Тому (\*)  $< \varepsilon + 2\varepsilon$  (оскільки відображення  $\psi$  - нерозтягуюче)

$$d(\psi(B_{jk}), D_{jk}) = 5\varepsilon + d(\psi(B_{jk}), D_{jk}).$$

Розглянемо  $\psi(y) = \psi(\lim_{k \rightarrow \infty} B_{jk}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(B_{jk})$ .

Використаємо рівномірну збіжність до тотожного на компактах послідовності  $\{\psi_j\}$ .

$$\psi_j(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_j(B_{jk}).$$

Оцінімо  $d(\psi(B_{jk}), D_{jk})$ .

Оскільки  $\psi(y) = \psi(\lim_{k \rightarrow \infty} B_{jk}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(B_{jk})$  в силу неперервності відображення  $\psi$ , а також  $\psi_j \rightarrow Id$  рівномірно на компактах, то можна вважати, що для деякого  $\psi(y) \in F^* X$  маємо  $\psi(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{jk}$ , а тоді з рівності  $\psi(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{jk}$  випливає  $\psi(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_{jk}$ , оскільки в про-

сторі  $F^*X$  умова 4 виконується. Тому для деякого  $m > m(\varepsilon)$  маємо  $d(\psi(y), D_m) < \varepsilon$ . Але тоді  $d(\psi(B_k), D_k) < d(\psi(B_k), \psi(y)) + d(\psi(y), D_k) < 2\varepsilon$ , адже відображення  $\psi$  - нерозтягуюче. Тому  $d(y, D_k) < 5\varepsilon + 2\varepsilon = 7\varepsilon$ .

Таким чином, умова 4) виконується і для простору  $F^{**}X$ , значить, за критерієм Войдиславського, простір  $F^{**}X$  належить класу  $AR(m)$ .

Перевіримо умову дискретної апроксимації замкнутими вкладеннями. Зафіксуємо будь-яке відображення  $\varphi: Q^*N \rightarrow F^{**}X$ . Зафіксуємо покриття  $U \in Cov(F^{**}X)$ . Тоді існує функція  $\alpha: F^{**}X \rightarrow (0,1]$ , така, що покриття  $\{O_{\alpha(\varphi)}(y): y \in F^{**}X\}$  вписане в покриття  $U$ . В.В.Федорчуком доведено в [1], що відображення  $\eta_n \bar{\Theta}_n: F^{**}X \rightarrow F^nX \subset F^*X \subset F^{**}X$  збігаються до тотожного рівномірно на компактах, тому можна вибрати таку послідовність цілих чисел

$$i(1) < i(2) < \dots < i(k) < \dots,$$

що відображення  $f^*: Q \times N \rightarrow F^*X$ , яке задається формулою  $f(q, n) = \psi_{i(n)}(\varphi(q, n))$ , буде  $\frac{1}{4}\alpha(\varphi)$  - близьким до відображення  $\varphi$ , тобто  $d(f^*(x), \varphi(x)) \leq \frac{1}{4}\alpha(\varphi(x))$ .

За лемою 1.1. з [2] для відображення  $f^*: Q \times N \rightarrow F^*X$  такого, що  $f^*$  відображає  $Q \times \{n\}$  в простір  $F^{(n)}X$  можна вибрати інше відображення  $g^*$  близькості  $\frac{1}{4}\alpha(\varphi)$  до попереднього, таким чином, щоб

$$g^*(Q \times \{n\}) \subset F^{(n)}X \setminus F^{(n-1)}X$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що в якості  $g^*$  виступає відображення  $f^*$ , тобто  $f^*(Q \times \{n\}) \subset F^{(n)}X \setminus F^{(n-1)}X$

Але кожний простір  $F^{(n)}X$  сильно  $m_1$ -універсальний, бо гомеоморфний псевдовнутрішності  $s$ , тому  $f^*$  можна вибрати  $Z$ -вкладенням, причому до вихідного відображення  $\varphi$  відображення  $f^*$  буде  $\frac{1}{4}\alpha(\varphi)$ -близьким. Дійсно, використаємо сильну  $m_1$ -універсальність простору  $s \cong F^{(n)}X$ . Вважаємо, що  $C = Q \times \{n\} \cup F^{(n-1)}X$ , а  $D = F^{(n-1)}X$  замкнуто в  $C$ ,  $f^*|_D \equiv Id_D$ , тоді існує відображення  $h: C \rightarrow F^{(n)}X$ , яке задовольняє наступні умови:

1)  $h \in \text{продовженням } f^*|_D$ ,

2)  $(h, f^*) < \frac{1}{4}\alpha(f(x))$ ,

3) відображення  $h \in Z$ -вкладенням.

Таким чином, побудоване вкладення  $f^*: (Q \times \{n\}) \subset F^{(n)}X \setminus F^{(n-1)}X$  близькості  $\frac{1}{4}\alpha(\varphi)$  до відображення  $\varphi$ .

Ототожнюємо природньо простір  $F^{**}X$  з простором  $F^{**}(FX)$  і зауважимо, що можна (виходячи з умов теореми) вважати, що  $X \cong s$ .

Означимо відображення  $g: Q \times N \rightarrow F^{**}X$ , як відображення зсуву формулою  $g(x) = \psi_{\frac{1}{4}\alpha(\varphi)}(x)$  для  $x \in Q \times \{n\}$  і  $a = f^*(x)$ , де  $\psi_a(x) = \{F^*(h_b)(x): t \in [0,1]\}$ , а також  $h_b$  - відображення зсуву на  $tb$  в  $l_2 \approx s$ .

Тоді  $d(f^*(x), g(x)) < \frac{1}{4}\alpha(\varphi(x))$ . Отже  $(g(x), \varphi(x)) < \alpha(\varphi(x))$ , що і треба було довести.

Перевіримо дискретність сімейства  $\{g(Q_n)\}$  в просторі  $F^{**}X$ . Допустимо від супротивного: існує послідовність  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , де  $x_j \in Q \times n(j)$ ,  $g(x_j) \rightarrow x \in F^{**}X$ .

Перевіримо дискретність сімейства  $\{g(Q_n)\}$  в просторі  $F^{**}X$ . Припустимо, що існує послідовність  $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  (від супротивного), де  $x_j \in Q^*n(j)$ ,  $g(x_j) \rightarrow x \in F^{**}X$ . Тоді  $\alpha(\varphi(x_j)) \rightarrow 0$ , звідки випливає, що  $\varphi(x_j) \rightarrow x$ , а також  $\alpha(x) = 0$ . Протиріччя, значить наше припущення невірне, тобто сімейство  $\{g(Q_n)\}$  дискретне в просторі  $F^{**}X$ , а значить відображення  $g \in \text{замкнутим вкладенням}$ , як завгодно близьким до відображення  $\varphi: Q \times N \rightarrow F^{**}X$ . Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Якщо виконуються наступні умови:

- 1) кожний простір  $F^nX$  гомеоморфний псевдовнутрішності  $s$ ;
- 2) кожний образ  $\eta_n(F^nX) \in Z$ -множиною в просторі  $F^*X$ ;
- 3) кожна породжена метризацією функтора  $F$  метрика  $d_n$  повна на просторі  $F^nX$ ;
- 4) кожне природне проектування  $\psi_{k+1,k}$  задовольняє умову сильної поліедральної апроксимативної  $p$ -м'якості;
- 5) простір  $F^*X \in \text{сильною } Z\text{-множиною}$  в кожному просторі  $F^{k+1}X, k \in \mathbb{N}$ , то гомеоморфні такі пари просторів:  $(F^{**}X, F^*X) \cong (s \times s, \text{rin } tQ \times s)$ .

Доведення теореми 2. Доведемо, що простір  $F^*X = \cup\{F^iX, i \in N\}$  буде  $m_1$ -скелетоїдом в просторі  $F^{**}X$  (тоді можна буде застосувати критерій Банаха про гомеоморфність пар).

Зафіксуємо довільне покриття  $U \in Cov(F^{**}X)$ , довільну  $z$ -множину  $A \subset F^{**}X$  і будь-яку замкнуту підмножину  $B \subset A \cap F^*X$ . Оскільки властивість  $z$ -спадкова по замкнених множинах, то  $B \in z$ -множиною в просторі  $F^{**}X$ . Використаємо сильну  $m_1$ -універсальність простору  $F^*X$  і той факт, що з  $A \in m_1$  випливає: що для будь-якого покриття  $U \in Cov(F^{**}X)$  і для відображення  $Id: A \subset F^*X$ . З того, що  $Id_B \in z$ -вкладенням в  $F^*X$  випливає, що існує таке продовження  $h$  відображення  $Id_B$ , яке задовольняє наступні умови:

- 1)  $(h, Id_B) \subset U$ ;
- 2)  $h \in z$ -вкладенням.

Відзначимо, що  $B \in z$ -множиною в просторі  $F^{**}X \cong s$ , а в просторі  $s$  будь-яка  $z$ -множина є сильною  $z$ -множиною, тому  $B$  буде сильною  $z$ -множиною в просторі  $F^{**}X$ , а оскільки  $B \subset F^*X$ , то  $B$  буде  $z$ -множиною в просторі  $F^*X$ .

Таким чином, всі умови з означення  $m_1$ -скелетоїда виконуються. Нагадаємо його.

Означення [1]. Підмножина  $X \subset s$  називається  $m_1$ -скелетоїдом, якщо її можна подати у вигляді  $X = \cup\{X_i; i \in N\}$ , де  $X_i \in z$ -множиною в просторі  $s$ , і для будь-якого покриття  $U \in Cov(s)$ , для будь-якої  $z$ -множини  $A \subset s$ , для кожної замкнутої підмножини  $B \subset A \cap X$  існує гомеоморфізм  $h: s \rightarrow s$  такий, що  $h(A) \subset X, h|_B = Id_B$  і відображення  $h$  має бути  $U$ -близьким до  $Id$ .

Застосовуємо критерій Банаха [3], за яким з того, що простір  $X \subset s \in m_1$ -скелетоїдом в просторі  $s \cong s \times s$  випливає гомеоморфність пар. Теорема 2 доведена.

1. Федорчук В.В. Тройки бесконечных итераций совершенно метризованных функторов. //Известия АН СССР. Сер. математическая. - Т.54. - 1990. - N2. - С.396-417.

2. M.Bestwina, I.Mogilsky. Characterizing Certain Incomplete Infinite-dimensional Absolute Retracts. Michigan math. - I. 33. - 1986. - P.291-313.

3. Банах Т.О. Про характеризацію пари  $(s \times s, \text{rint } Q \times s)$ . ДЕП в УкрНІНТІ 14. 06. 90 N1105-Ук90.

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНОЛОГІЧНІЙ МЕХАНІЦІ АРМОВАНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ**

*Традиційна теорія композиційних матеріалів вже не здатна задовольнити зростаючі вимоги до їх міцності і надійності, оскільки вона не враховує особливостей технологічних та фізико-хімічних процесів, що мають місце при формуванні деталей із композиційних матеріалів. Зокрема, в результаті цих процесів відбувається послаблення міжфазної адгезії, що визначає рівень міжфазної взаємодії.*

*Traditional mechanics of composite materials (CM) is based substantially on the known postulates and equations of continuous anisotropic media, therefore it does not take into account the peculiarities of technological and physical-chemical processes occurring during moulding of details of CM. This works is considered with mathematical models of CM state with account effects of interphase adhesion. It derives quantities describing materials and show procedure of practical problems of CM.*

З вищевказаних причин запропоновано ряд підходів (зокрема, феноменологічний і фізичний) до побудови розширених моделей механіки композиційних матеріалів, у яких вводяться додаткові параметри (вектор міжфазного зміщення або рівень міжфазного зчеплення). Розглянуто застосування запропонованих методів до розв'язання актуальних проблем технологічної механіки. Розвинуті методи дозволяють кількісно оцінити вплив рівня міжфазної адгезії на макроскопічні характеристики, міцність і опір руйнуванню композиційних матеріалів. Однак, інженерне використання результатів можливе лише після проведення серії експериментів. Тоді процес одержання нових класів композиційних матеріалів стане керованим, з точки вибору рівнів міжфазної адгезії.

Одна з важливих проблем сучасної техніки - створення нових композиційних матеріалів, здатних забезпечити надійну службу деталей машин, споруд та інженерних конструкцій. Людство стоїть на порозі революції в галузі матеріалознавства: вже освоєно різноманітні полімерні композити, котрим одночасно притаманні достатня міцність і значна антикорозійність у порівнянні з традиційними матеріалами, розроблено нові класи конструкційних матеріалів (багатошарові, квазішарові та ін.) із підвищеними характеристиками в'язкості руйнування [1].

Традиційна теорія композиційних матеріалів (КМ) побудована, по суті, на базі відомих постулатів та рівнянь механіки суцільних анізотропних середовищ і тому не враховує особливостей технологічних та фізико-хімічних процесів, що мають місце при формуванні деталей із КМ. Зокрема, в результаті протікання таких процесів утворюються тонкі чужорідні міжфазні шари, різні недосконалість міжфазної структури, пов'язані з наявністю поверхонь розділу фаз [2-4]. Такі утворення, що визначають рівень міжфазної взаємодії, будемо трактувати як послабленість міжфазної адгезії в об'ємі КМ.

На сьогодні маємо експериментальні дані, що свідчать про існування істотного впливу міжфазної адгезії на макроскопічні характеристики КМ, їх динамічні, зокрема дисипативні, властивості та опір руйнуванню. Модифікація міжфазної адгезії забезпечується в експериментах шляхом використання різноманітних апретів (при фіксованих компонентах КМ), а також зміною технологічних режимів виготовлення елементів конструкцій (час витримки, температура та ін.). Природньо постає запитання: які ж рівні міжфазної адгезії необхідно забезпечити для одержання КМ з високими (екстремальними) експлуатаційними властивостями?

У розв'язанні проблеми на даному етапі намітилась тенденція до побудови розширених моделей механіки КМ, в яких вводяться деякі додаткові параметри, що відображають вплив вищезгаданих технологічних та фізико-хімічних процесів.

## I. МОДЕЛЮВАННЯ МІЖФАЗНОЇ АДГЕЗІЇ В КМ.

Вихідним моментом у побудові адгезійної мезаніки КМ є вибір параметрів, що визначають рівень міжфазної адгезії.

Запропоновано ряд підходів. При першому (феноменологічному) підході припускається, що на границях розділу фаз у КМ, як результат інтенсивних фізико-хімічних перетворень, утворені зони (поверхні) послабленої адгезії (ЗПА), на яких спостерігається розрив (стрибок) вектора зміщень:

$$\bar{u}_i - \bar{u}_{i+1} = \bar{\varphi}_i. \quad (1)$$

Величина (1) є невідомою інтегральною функцією параметрів процесів. Разом з тим, умова (1) фіксує рівень контактної взаємодії в ЗПА, що визначається тангенціальним напруженням адгезії  $\tau_s$ .

Виходячи із термодинамічних позицій, для замкнутості одержаних співвідношень потрібно ввести відповідний вектору міжфазних зміщень новий параметр стану структури - вектор міжфазних сил  $\bar{x}$  в ЗПА, такий що

$$\bar{x} \cdot \bar{\varphi} \geq 0.$$

Очевидно,  $\bar{x}$  є функцією вектора  $\bar{\varphi}$ , а також інших механічних та технологічних параметрів (зокрема, температури, коефіцієнту тертя, контактного усадкового тиску та ін.)

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{\varphi}, \omega). \quad (2)$$

Якщо існує дисипативна скалярна функція, то при цьому

$$D = \bar{x} \cdot \bar{\varphi}. \quad (3)$$

Розглянемо два можливих випадки:

а) якщо функція D лінійна відносно  $\bar{\varphi}$ :

$$D = \bar{\psi} \cdot \bar{\varphi}, \quad (4)$$

то  $\bar{x} = \bar{\psi}$ , де  $\bar{\psi}$  - новий параметр, що характеризує міжфазну адгезію. Зокрема, якщо  $\bar{\psi} = \tau_s \cdot \bar{s}$  ( $\bar{s}$  - одиничний вектор, дотичний до міжфазної поверхні), то величина  $\tau_s$  характеризує рівень зчеплення в ЗПА;

б) у випадку, якщо D - квадратична функція  $\bar{\varphi}$ :

$$D = \frac{1}{2} \hat{\psi} \cdot \bar{\varphi} \cdot \bar{\varphi}, \quad (5)$$

маємо лінійно-дисипативний механізм адгезійної взаємодії

$$\bar{x} = \bar{\varphi} \cdot \hat{\psi}, \quad (6)$$

де  $\hat{\psi}$  - деякий об'єкт, що визначає тензор другого рангу. По суті, формула (6) є узагальненням закону Кулона на випадок контакту анізотропних фаз [5].

Інший фізичний підхід постулює наявність у структурі КМ чужорідних міжфазних шарів (МФШ), що виникли в результаті фізико-хімічних процесів із визначеною геометрією (товщина  $h_{\text{МФШ}}$ , кривизна  $K_{\text{МФШ}}$ ) та механічними властивостями (модуль пружності  $E_{\text{МФШ}}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu_{\text{МФШ}}$  та ін.). В цьому випадку, вважаючи МФШ малими, одержуємо узагальнені умови спряження армуючої та матричної фаз типу

$$\begin{aligned} U_a^j - U_m^j &= P_j(h_{\text{МФШ}}, E_{\text{МФШ}}, \dots), \\ \sigma_a^j - \sigma_m^j &= R_j(h_{\text{МФШ}}, E_{\text{МФШ}}, \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $P_j, R_j$  - відомі функції граничних переміщень фаз та вищезгаданих параметрів МФШ.

Таким чином, додатковими параметрами, що моделюють рівень міжфазної адгезії, пропонується прийняти вектор міжфазного зміщення, або (в наближенні (4)) рівень міжфазного зчеплення.

## II. ФУНКЦІЯ ДИСИПАЦІЇ.

Визначаючи роботу зовнішніх сил від початкового моменту  $t=0$ , що відповідає природному стану спокою, до розглядуваного моменту часу  $t$ , одержимо рівність

$$\dot{R} = \dot{K} + \int_{\Omega} \sigma_{kr} e^{kr} d\Omega + \int_{S_i} \bar{x}^k \bar{\varphi}_k dS_j.$$

Інтегруючи в границях процесу, одержимо формулу

$$R = K + A + \Delta \mathcal{E}, \quad (8)$$

що виражає закон збереження механічної енергії для КМ з урахуванням міжфазної адгезії, причому величина

$$\Delta \mathcal{E} = \int_0^t dt \int_S \bar{x}^k \varphi_k dS. \quad (9)$$

визначає дисипацію енергії в КМ на її міжфазних границях. У випадку, коли вектор міжфазних сил  $\bar{x}$  не залежить від часу

$$\Delta \mathcal{E} = \int_S \bar{x}^k \bar{\varphi}_k dS. \quad (10)$$

Функції дисипації (9) і (10) відіграють ключову роль при розгляді динамічних задач та задач опору руйнуванню КМ.

Нижче розглянуті застосування запропонованих методів до розв'язання деяких актуальних проблем технологічної механіки КМ.

## III. ЕФЕКТИВНІ МОДУЛІ КМ.

Розглянемо проблему впливу міжфазної адгезії (МФА) на макроскопічні характеристики КМ. В роботі [3] поставлено і розв'язано таку задачу для полідисперсного середовища, армованого сферичними або циліндричними вклученнями. Прийнята концепція МФШ і, відповідно, умова (7) на міжфазних границях.

Аналіз виявляє такий факт - умова ефективності наповнення має місце тільки у тому випадку, коли відношення модулів пружності МФШ і матриці більше від деякої величини  $c$ , що є додатним коренем квадратного рівняння

$$Ac^2 + Bc + C = 0, \quad (11)$$

де  $A, B$  і  $C$  - відомі коефіцієнти, що залежать від геометричних та фізико-механічних параметрів структури.

Для прикладу розглянемо варіант КМ: поліефірна матриця, скляні мікросфери при  $E_a/E_m = 40$ ,  $\nu_a = 0,21$ ,  $\nu_m = 0,45$  (індексами (a) і (m) позначено відповідні характеристики армуючих і матричних фаз). На мал.1 показано графіки зміни об'ємного модуля  $K/K_m$  в залежності від параметру  $\epsilon = (1 + \frac{E_m}{E_{\text{МФШ}}})^{-1}$  і об'ємної долі вклучень  $c$ . Характерно, що криві на мал.1 перетинаються незалежно від  $c$  в одній точці, для котрої, в цьому випадку, корінь  $c$  рівняння (11) дорівнює  $1/3$ , що відповідає  $\epsilon = 0,25$ .



## IV. ОПІР РУЙНУВАННЮ КМ.

Розглянемо деякі величини  $\tau_d$ , що характеризують відхилення рівня адгезії від ідеальної  $\tau_a$ . По суті,  $\tau_d$  може трактуватись (12) як величина (міра) "пошкодження" границі розділу фаз. Проблема полягає в знаходженні оптимальних рівнів зчеплення  $\tau_s = \tau_a - \tau_d$  (або рівнів "пошкодження"  $\tau_d$ ), що надають композиційній структурі екстремальні властивості опору руйнуванню.

Для вивчення властивостей опору руйнуванню системи складемо рівняння енергетичного балансу в околі тріщини нормального розвитку в локальному об'ємі тіла  $v_d$ , що містить поверхні розділу фаз  $S_j$  з послабленою адгезією. Згідно з [6,7], загальний енергетичний критерій поширення (гальмування і зупинки) тріщини запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} &\geq 0 \quad (\text{поширення}) \\ &\frac{\partial}{\partial \epsilon} (U_n - \Gamma_n - \Delta \mathcal{E}_s) \\ &\leq 0 \quad (\text{гальмування і зупинка}) \end{aligned} \quad (13)$$

де  $U_n$  - потенціальна енергія тіла з тріщиною,  $\Gamma_n$  - поверхнева енергія,  $\Delta \mathcal{E}$  - незворотно розсіювана енергія (11), зумовлена роботою сил міжфазної адгезії на відповідних градієнтах зміщень границь розділу.

Згідно (12), тріщина буде нестійкою у випадку, коли швидкість зростання енергії рухомої тріщини більша швидкості витрат енергії при утворенні нових поверхонь і порушенні адгезійних зв'язків в областях  $S_j \in V_d$ .

В даному випадку функція  $\Delta \mathcal{E}_s$  згідно (10) виражена так

$$\Delta \mathcal{E}_s = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{S_j} \tau_s^j \Delta U_s^j dS_j, \quad (13')$$

де  $(m-1)$  - число границь розподілу фаз в  $v_d$ .

Як і в теорії деформівних середовищ з пошкодженнями, вважатимемо, що в зонах неідеальної адгезії виконуються деякі

рівняння зв'язків:  $\Delta U \sim \tau_d$ , постулюючи їх, наприклад, у вигляді лінійного співвідношення (для одномірного випадку)

$$\Delta U_s^j = B_s^j \tau_d^j (l_{s_j}^2 - \xi_j^2), \quad (14)$$

де  $x_j$  - лінійна координата вздовж  $S_j$ ,  $B_s^j$  - жорсткість моношару на розтяг,  $l_{s_j}$  - лінійний розмір ЗПА.

Підставляючи (14) в (13'), одержимо:

$$\Delta \mathcal{E}_s = \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^{l_{s_j}} B_s^j \tau_d^j (\tau_a^j - \tau_d^j) (l_{s_j}^2 - \xi_j^2) dS_j. \quad (15)$$

Знайдемо  $\Delta \mathcal{E}_s$ , припустивши, що підінтегральні функції не залежать від координати  $x_j$ , а також від індексу фази. При цьому матимемо

$$\Delta \mathcal{E}_s = B_s (m-1) \tau_d (\tau_a - \tau_d) \frac{l_s^2}{6B_s}. \quad (16)$$

Розглядаючи випадок плоскої деформації пластини із КМ, що містить наскрізну тріщину довжиною  $2 l_n$ , вважатимемо, що функції  $U_n$  і  $\Gamma_n$  можуть бути наближено знайдені за відомими формулами:

$$U_n \approx \frac{\pi \sigma^2 l_n^2}{E}, \quad \Gamma_n = 4 \gamma_n L_n, \quad (17)$$

де  $g_n$  - густина поверхневої енергії. Підставляючи одержаний результат для функції дисипації (16), а також вирази (17) в критерій (13), остаточно одержимо для критичного напруження наступну формулу

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2E\gamma_n}{\pi l_n} [1 + (m-1)\tau_d(\tau_a - \tau_d) \frac{l_s^2}{B_s}]}, \quad (18)$$

або

$$\sigma_{кр} = \sigma_{кр}^* \sqrt{1 + (m-1)\tau_d(\tau_a - \tau_d) \frac{l_s^2}{B_s}},$$

де  $\sigma_{кр}^* = \sqrt{\frac{2E\gamma_n}{\pi l_n}}$  - критичне напруження руйнування для відповідної однорідної структури.

Аналізуючи (18) відзначаємо, що завжди існують такі рівні міжфазної адгезії, наявність яких призводить до підвищення тріщиностійкості КМ. Так, екстремальне значення функції  $\sigma_{кр}$  по

рівню міжфазної адгезії (або міжфазного пошкодження  $\tau_d$ ) досягається за умови:

$$(\sigma_{xp})'_{r_n} = 0, \quad (19)$$

тобто, в даному випадку, при  $\tau_d = \tau_s = \frac{\tau_a}{2}$ . Це значить, що при послабленні міжфазної адгезії до рівня половини ідеальної адгезійної міцності композиційна структура набуває екстремальних властивостей опору руйнуванню.

## V. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ:

Розвинуті методи дозволяють кількісно оцінити вплив рівня міжфазної адгезії на макроскопічні характеристики, міцність і опір руйнуванню КМ. Однак, інженерне використання результатів можливе лише при постановці цільових експериментів по виявленню взаємозв'язку рівнів міжфазної адгезії з параметрами технологічних та фізико-хімічних процесів формування деталей із КМ (час витримки, температура, хімічні потенціали фаз, властивості апретів, тощо). Лише в цьому разі замкнемо ланцюжок - моделювання-технологія, і, таким чином, процес одержання нових класів КМ стане керованим, з точки зору вибору рівнів міжфазної адгезії.

Дальший прогрес у розв'язанні цієї проблеми можливий лише при інтенсифікації і синтезі фундаментальних та прикладних розробок у науці по КМ. Такою новою галуззю на стику наук повинна стати фізико-хімічна механіка композиційних матеріалів.

На завершення відзначимо, що концепція регулювання рівня міжзеренної адгезії з метою забезпечення підвищеної тріщиностійкості може бути узагальнена для структурної механіки руйнування металевих матеріалів [11].

1. Патон Б. Проблемы металлургии будущего // Будущее науки. - М.: Знание, 1981.

2. Interface in polymer composites (edited by E.Pludemann). - М.: "Mir", 1987.

3. Пелех Б.Л., Флейшман Ф.Н. Влияние тонких межфазных слоев на макроскопические характеристики композиционных материалов // Вестник АН СССР: - Механика твердого тела. - 1984. - N3. - С.68-73.

4. Пелех Б.Л., Максимук О.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для шаровых элементов, конструкций и тел с покрытиями. - К.: Наук. думка, 1988.

5. Пелех Б.Л., Цасюк В.В. Тертя на анізотропних поверхнях твердих тіл // Некласичні проблеми механіки композиційних матеріалів. - К.: Наук. думка, 1984. - С. 50-51.

6. Пелех Б.Л. Формування і розв'язання задач гальмування та зупинки тріщин в композиційних середовищах//Доп. АН УРСР. СЕР.А. - 1982. - N 6. - С. 48-51.

7. Пелех Б.Л. Проектування шаруватих композиційних матеріалів із підвищеною тріщиностійкістю. - К.: Т-во "Знання" УРСР, 1981. - С.28.

8. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. - М.: Наука, 1974.

9. Пелех Б.Л. Фізико-хімічна механіка композиційних матеріалів// Міцність, жорсткість і технологічність виробів із композиційних матеріалів: Матеріали Всес. конф. - Запоріжжя: Вид-во при Запоріж. ун-ті, 1989.

10. Пелех Б.Л. Про розвиток фізико-хімічної механіки композиційних матеріалів//Матеріали I Сесії Матеріалознавчої комісії НТШ. - Львів-Славське, 1990. - С.28.

11. Романів О.М. Структура механіки руйнування//ФХММ. - 1981. - N 4. - С. 28-45.

**Б.М.Дрінь, О.В.Козич**

## **ОСНОВНІ ЕТАПИ ПОБУДОВИ ІНФОРМАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНОГО ТИПУ**

*Розкрито основні етапи побудови інформаційної моделі динамічного типу на прикладі реалізації екологічної задачі.*

*Описано, зокрема, такі етапи побудови: опис суті проблеми; постановка мети завдання; постановка задачі; побудова математичної моделі як проміжної ланки між об'єктом дослідження і його інформаційною моделлю; побудова інформаційної моделі; побудова інтерфейсу.*

*It is disclosed the main stadies of buillding dynamic type informative model of the really ecological task problem*

*It is described namely substages of buillding: the description of the essence of the aim of the task; the statement of the problem; the buillding of the mathematical model as the intermediate link between the object of reset and its informative model; the buillding of the informative model; the buillding of the interface.*

### **1. Опис суті проблеми.**

Науково-технічні досягнення, їх впровадження в промисловість, сільське господарство і т.д. приносять людству не тільки користь і блага, але й супроводжуються такими негативними явищами як: забруднення атмосфери, морських акваторій і прісних водойм; порушення ґрунтів і ландшафтів; виснаження водойм і лісових ресурсів; зменшення чисельності флори і фауни, збільшення захворюваності серед людей бронхітом, астмою, алергією, ішемією, раком і т.п.

Становище, в яке сьогодні потрапило все живе планети, вимагає від усіх нас гуманного ставлення до законів природи і зважати на ті обмеження, які вона ставить перед людською діяльністю [1].

### **2. Постановка задачі.**

Побудувати інформаційну модель для розрахунку концентрації шкідливих речовин в атмосфері на різних ділянках території, що досліджується.

### **3. Побудова математичної моделі.**

Зробимо деякі припущення, які дадуть певні спрощення. Якщо надалі виникне потреба від них відмовитись, то це вимагатиме тільки ускладнення чи розширення певної моделі.

#### **1. Усі підприємства - точкові джерела шкідливих речовин.**

Це означає, що ми нехтуємо реальними розмірами, так як вони є незначними у порівнянні із відстанню до точки, яка досліджується.

**2. Місто розміщується у площині - відповідно рельєф місцевості не впливає на розповсюдження шкідливих речовин.**

Таке припущення дозволяє вважати напрям розповсюдження шкідливих речовин однаковим відносно всіх точок і залежним тільки від напрямку вітру. Основними елементами нашої моделі будуть підприємства як джерела забруднення і шкідливі речовини, які вони викидають.

Важливими параметрами задачі є: місце розміщення підприємства, склад забруднюючих викидів і їх об'єм, а також висота джерела (труби), діаметр верхньої частини (звідки здійснюється викид) і температура газовикидувочої суміші.

Для задання місця знаходження підприємства виберемо декартову систему координат на площині. У ній місцезнаходження кожного підприємства визначається парою координат (x,y). Склад забруднюючих речовин і їх об'єм для кожного підприємства може бути заданий списком:

E - ім'я елемента,

Q - об'єм викиду.

Ім'я елемента для нашої задачі відіграє роль тільки ідентифікатора якоїсь шкідливої речовини. Надалі може виникнути потреба визначення характеристик даного предмета, наприклад, гранично-допустимих концентрацій. Тому доцільно створити список шкідливих речовин з їх характеристиками, а саме:

Е - iм'я елемента,

К - клас небезпечностi,

$P_{\max}$  - ГДК (гранично-допустима концентрацiя) максимальна одноразова,

$P_c$  - КДК середньодобова,

$K_f$  - коефiцiєнт швидкостi осiдання.

При побудовi даної моделi складним є питання розповсюдження шкiдливих речовин. На процес розсiювання викидiв iстотно впливають фiзичнi i хiмiчнi властивостi речовини, висота джерела i т.д. Територiальне (горизонтальне) перемiщення шкiдливих речовин в основному визначається швидкiстю вiтру, а вертикальне - розподiлом температур. Розподiл концентрацiї шкiдливих речовин в атмосферi над факелом органiзованого високого джерела подано на мал.1.



Мал. 1

Розподiл концентрацiї речовин над землею по осi факела на рiзних вiдстанях  $x$  вiд джерела викиду знаходять за формулою

$$C_x = S1 + C_m$$

Безрозмiрна величина  $S1$  залежить вiд спiввiдношення  $X/X_{\max}$  i визначається з графика 1.

$C_m$  - максимальна концентрацiя шкiдливих речовин над землею. Досягається вона на осi факела викиду на вiдстанi  $X_m$  вiд джерела викиду.

$$C_m = \frac{A \cdot M \cdot K_f \cdot m \cdot n}{H^2 \cdot \sqrt{Q \Delta T}}, \text{ де}$$

$A$  - коефiцiєнт, що залежить вiд температурного градiєнта атмосфери;

$M$  - маса речовини, що викидається в атмосферу за одиницю часу;

$Q$  - об'єм газоутворюючої сумiшi, що реалiзується;

$K_f$  - коефiцiєнт, що враховує швидкiсть осiдання частинок викиду в атмосферу;

$\Delta T$  - рiзниця мiж температурою викидуючої газоповiтряної сумiшi i температурою навколишнього атмосферного повiтря;

$m$  - безрозмiрний коефiцiєнт, що визначається за графiком 2 в залежностi вiд параметра  $f$ .

Параметр  $f$  визначається за формулою:

$$f = \frac{100 W r^2 \cdot D}{H_{\min}^2 \Delta T}, \text{ де}$$

$W r$  - середня швидкiсть викиду речовини iз джерела забруднення,

$$D = 1.13 \cdot \sqrt{Q / W r}$$

$n$  - безрозмiрний коефiцiєнт, який визначається в залежностi вiд швидкостi вiтру  $V_m$ .

$$V_m = 0.65 \cdot \sqrt[3]{Q \cdot T / H_{\min}}$$

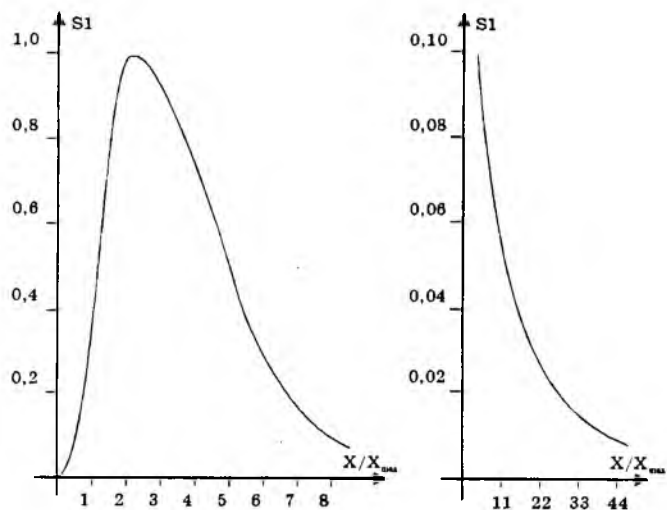
$$n = \begin{cases} 3.0 & , \text{ при } V_m \leq 0.3 \\ 1.0 & , \text{ при } V_m > 2.0 \\ 3 - \sqrt{(V_m - 0.3) \cdot (4.36 - V_m)} & , \text{ при } 0.3 < V_m \leq 2.0 \end{cases}$$

$$H_{\min} = \sqrt{\frac{A \cdot M \cdot K_f \cdot m \cdot n}{\text{ГДК} - C_t}} \sqrt{\frac{1}{Q \cdot \Delta T}}$$

де  $C_t$  - фоновая концентрацiя однакових речовин,  
 $H$  - висота джерела викиду.

$$X_{\max} = \begin{cases} Kf \cdot H & , \text{ при } Kf < 2 \\ \frac{5 - Kf}{4} & , \text{ при } Kf \geq 2 \end{cases}$$

$$Kd = \begin{cases} 4.95 \cdot Vm \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & , \text{ при } Vm \leq 2.0 \\ 7.0 \cdot Vm \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & , \text{ при } Vm > 2.0 \end{cases}$$

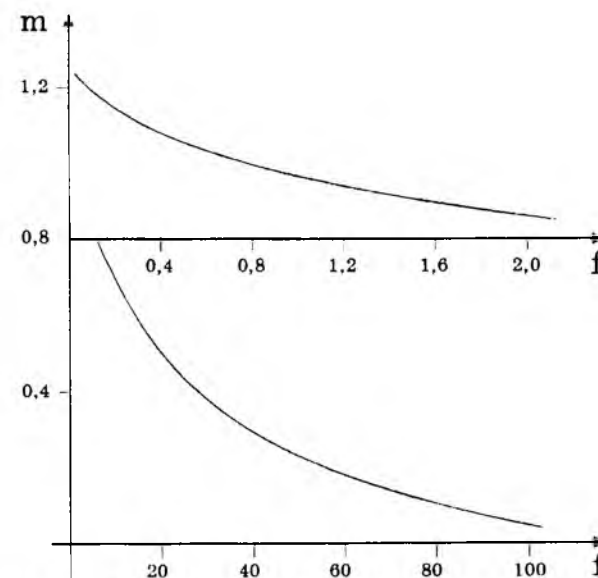
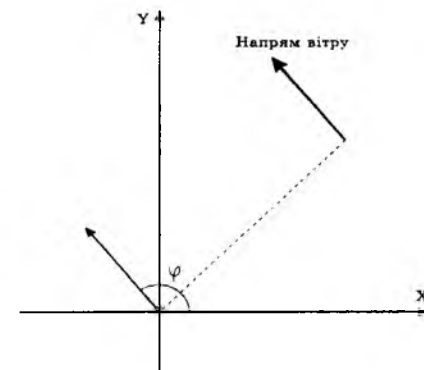
Графік 1. Залежність безрозмірної величини S1 від X/X<sub>max</sub>

Розподіл концентрації шкідливих речовин у приземному шарі атмосфери у поперечному перерізі факела на відстані X від джерела викиду обчислюється за формулою:

$$C_{zx} = \frac{Cx}{Cx + Z^2 \cdot Kf}$$

де Z - відстань від осі факела [3].

Тепер у нас готова модель для розрахунку концентрації шкідливих речовин у довільній точці. Однак, для повного розв'язку задачі необхідно зробити прив'язку до осі факела і місцевості. Його початок визначається координатами підприємства, а напрям - напрямком вітру. Для задання напрямку вітру може бути використаний кут його нахилу до осі X у декартовій системі координат.



Графік 2. Визначення безрозмірного коефіцієнта m.

#### 4. Побудова інформаційної моделі.

Модель складається із власне самої моделі і засобів роботи з нею (інтерфейсу). Розглянемо саму модель.

Для інформаційної моделі динамічного типу характерна серія блоків, які ми і опишемо.

### Блок ПРОСТІР-ЧАС.

Для даної моделі простір відображає певну територію дослідження (площина у декартовій ситемі координат), а час - період розповсюдження шкідливих речовин викиду.

### Блок ВІТЕР.

Визначає напрям і швидкість переміщення викидів в атмосфері від різних джерел забруднення і їх взаємодію.

### Блок ДЖЕРЕЛО.

Містить координати джерел забруднення на площині і такі їх характеристики як: висота труби, об'єм викиду за одиницю часу, температура викиду і т.д.

### Блок ЗАКОН РОЗПОВСЮДЖЕННЯ.

Його завдання - розрахувати концентрацію шкідливих речовин в будь-якій заданій точці при вказаному напрямі і швидкості вітру.

### Блок РЕЧОВИНА.

Відіграє інформаційну роль і містить список елементів викиду джерела забруднення (шкідливі речовини), їх гранично-допустимі концентрації (разова і середньодобова), клас небезпечності і інші параметри.

При визначенні стану повітряного середовища слід врахувати, що сумарна концентрація шкідливих речовин не повинна перевищувати 1 при розрахунку за формулою:

$$\frac{C1}{ГДК1} + \frac{C2}{ГДК2} + \dots + \frac{Cn}{ГДКn} \leq 1.$$

### Блок ІНТЕРФЕЙС.

Забезпечує зв'язок користувача з моделлю (завдання початкових даних, отримання результатів, управління і т.п.)

Структура інтерфейсу будується з врахуванням вимог до побудови моделі та роботи з нею і може мати вигляд:



Вікно спостереження на модельній площині ототожнюється з дисплеєм, тобто кожній точці площини ставиться у відповідність точка екрану.

Задання даних пов'язане з введенням списку шкідливих речовин, джерел забруднення і їх характеристик.

Управління включає такі операції:

- запуск моделі;
- переривання роботи моделі;
- повернення в початковий стан;
- задання режимів роботи;
- задання параметрів;
- обробка критичних ситуацій.

На цьому опис моделі завершується. Наступним етапом є програмно-апаратна реалізація даної моделі, яка виконана авторами.

1. Андерсон Дж.М. Экология и науки об окружающей среде: биосфера, экосистемы, человек. - Л: Гидрометеоиздат, 1985. - 165 с.
2. Белошапка В.К., Лесневский А.С. Основы информационного моделирования. // Информатика и образование. - 1989. - №3. - С.17-24.
3. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. - Л: Гидрометеоиздат, 1985. - 272 с.



М.А.Рувінський

## СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ І ПРИНЦИП ТОТОЖНОСТІ У НОВОМУ ФОРМУЛЮВАННІ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

У роботі показано, що в рамках нового формулювання квантової механіки, запропонованого автором в [1,2], співвідношення невизначеності Гейзенберга для координати та імпульсу і рівняння Шредінгера "генетично" пов'язані між собою. Подано також нову інтерпретацію принципу тотожності в квантовій механіці систем однакових частинок.

*It is shown that the uncertainty Heisenberg's relations for the coordinate and momentum and the Schrodinger's equation are "genetically" connected within the framework of the new formulation of quantum mechanics proposed by author in the works [1,2]. The new interpretation of the identity principle in the quantum mechanics of systems of the same particles is also presented.*

У роботах [1, 2] на основі уявлень про існування фундаментального кванта дії, запровадження двох випадкових функцій дії  $S$  і  $S'$  з неоднорідним розподілом Пуассона для стохастичного числа квантів дії  $N = -2 \cdot S' / \hbar$  отримані усереднені рівняння, еквівалентні нерелятивістському рівнянню Шредінгера і квантово-механічному рівнянню неперервності. При цьому в [2] було зроблено припущення про єдину дисперсію для двох швидкостей однієї частинки і статистичну незалежність їх випадкових значень:

$$\overline{(\nabla\sigma)^2} = \overline{(\nabla\sigma')^2}, \quad (1)$$

$$\overline{\nabla\sigma \cdot \nabla\sigma'} = \overline{\nabla\sigma} \cdot \overline{\nabla\sigma'} = 0 \quad (2)$$

$$\sigma \equiv S - \bar{S}, \quad \sigma' \equiv S' - \bar{S}', \quad (3)$$

де рискою вгорі позначені середні від мікроскопічних функцій, згладжені за просторово-часовими масштабами зміни цих функцій (усереднення за випадковим числом квантів дії  $N$ ). З умовами (1) і (2) пов'язано виникнення рівняння Шредінгера, а з (2) рівняння неперервності.

Виявляється, що з формули (1) випливає співвідношення невизначеності Гейзенберга для координати та імпульсу. Отже, співвідношення невизначеності і рівняння Шредінгера у новому формулюванні квантової механіки є "генетично" пов'язані.

Оскільки густина імовірності знаходження частинки у просторово-часовій точці  $(\vec{r}, t)$  визначається середнім числом  $\bar{N}(\vec{r}, t)$  квантів дії мікрочастинки у цій точці [1,2]

$$w(\vec{r}, t) = C \cdot e^{-\bar{N}(\vec{r}, t)} \quad (4)$$

(де  $C$  - стала нормування  $w(\vec{r}, t)$ ), то ліва і права частини в (1) залежать від випадкових місцеположень частинки. Проведемо в (1) усереднення за просторовим розподілом (4) у довільний фіксований момент часу  $t$ , яке позначимо кутовими дужками  $\langle \dots \rangle$ :

$$\langle \overline{(\nabla\sigma)^2} \rangle = \langle \overline{(\nabla\sigma')^2} \rangle \quad (5)$$

Для одновимірного руху вздовж осі  $x$ , враховуючи (1), (3) і формулу для другої дії  $S' = -\frac{\hbar}{2} \cdot N$ , маємо

$$\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \left\langle \overline{\left( \frac{d\Delta N}{dx} \right)^2} \right\rangle \quad (6)$$

де  $\langle (\Delta p_x)^2 \rangle$  - дисперсія складової імпульсу  $p_x$ ,  $\Delta N \equiv N - \bar{N}$ .

Визначимо середнє квадратичне відхилення координати  $\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$  за лінійною дисперсією [5] числа квантів дії  $\sqrt{2 \cdot \langle (\Delta N)^2 \rangle}$ , тобто

$$\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} = \frac{\sqrt{2 \cdot \langle (\Delta N)^2 \rangle}}{\sqrt{\langle \left( \frac{dN}{dx} \right)^2 \rangle}}, \quad (7)$$

Тоді, як легко бачити з (6) і (7), добуток невизначеностей імпульсу і координати дорівнює

$$\sqrt{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \langle (\Delta N)^2 \rangle} \quad (8)$$

Згідно з розподілом Пуассона [2,3]

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \bar{N}, \quad (9)$$

$$i \quad \sqrt{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \langle \bar{N} \rangle}, \quad (10)$$

$$\text{де } \langle \bar{N} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{N}(x, t) \cdot w(x, t) \cdot dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\bar{N}(x, t)} \cdot dx} \quad (11)$$

Оцінку (11) проведемо, виходячи з того, що найбільш імовірне положення частинки відповідає мінімальному середньому числу квантів дії  $\bar{N}(x_0, t)$  у частинки в даній точці:

$$\bar{N}(x, t) \approx \bar{N}(x_0, t) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot \left. \frac{d^2 \bar{N}(x, t)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad (12)$$

$$\bar{N}(x_0, t) \geq 0, \quad \left. \frac{d^2 \bar{N}(x, t)}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0, \quad (13)$$

і домінуючий внесок в (11) пов'язаний з околom точки  $x_0$ . Тоді

$$\langle \bar{N}(x, t) \rangle = \bar{N}(x_0, t) + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}. \quad (14)$$

З (10) і (14) маємо відоме співвідношення невизначеності Гейзенберга

$$\sqrt{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (15)$$

яке виявляється наслідком припущення про однакову дисперсію двох швидкостей мікрочастинки і є необхідною умовою отримання рівняння Шредінгера у новому формулюванні квантової механіки [1, 2]. Зрозуміло, що наявність двох швидкостей у мікрочастинки є виразом відсутності поняття класичної траєкторії [4, 5, 10].

У системі багатьох частинок густина імовірності певної конфігурації системи визначається середнім числом квантів стохастичної дії  $\bar{N}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = -\frac{2}{\hbar} \cdot \bar{S}'(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t)$  всієї системи [2]:

$$w(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = A \cdot \exp[-\bar{N}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t)] \quad (16)$$

Отримана подібно до одночастинкового випадку система рівнянь [2]

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{(\nabla_i \bar{S})^2}{2 \cdot m_i} + v - \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_i} \cdot \frac{\nabla_i^2 \cdot \sqrt{w}}{\sqrt{w}} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum \text{div}_i w \frac{\nabla_i \bar{S}}{m_i} = 0,$$

еквівалентна рівнянню Шредінгера для хвильової функції системи частинок



$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = [w(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t)]^{1/2} \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} \cdot \bar{S}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t)\right]$$

і відповідному рівнянню неперервності [4,5].

У системі однакових частинок в рамках нового формулювання квантової механіки принцип тотожності, пов'язаний з співвідношеннями невизначеності, набуває такого змісту:

Середнє число квантів стохастичної дії  $\bar{N}(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  системи однакових частинок не залежить від перестановки частинок, де  $x_i$  - сукупність просторових і спінових змінних  $i$ -ої частинки.

Оскільки  $\bar{N}(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  визначає густину імовірності  $w(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  певної конфігурації системи частинок, то з переставної інваріантності  $\bar{N}(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  випливає переставна інваріантність більше  $w$ . На останньому ґрунтується доведення Жирардо [6, 7] принципу симетрії для хвильових функцій системи тотожних частинок з висновком про одномірність незвідних представлень групи перестановок [8,9]. Звідси, як відомо [4, 5, 10], і випливає можливість реалізації в природі лише станів з симетричними і антисиметричними хвильовими функціями. Що стосується загального припущення про одномірність незвідних представлень групи перестановок, то в роботі [9] було показано, що опис стану тотожних частинок багатомірними незвідними представленнями суперечить поняттю тотожності частинок.

Отже, уявлення про фундаментальні кванти дії, яке лежить в основі нового формулювання [1, 2] квантової механіки, природно і послідовно узгоджується з принципами невизначеності і тотожності.

1. Рувинский М.А. Нерелятивистское уравнение Шредингера и двухскоростная пуассоновская стохастическая механика // Изв.

вузов: Физика. - 1986. - N.1. - с. 125. - Деп. в ВИНТИ 25.07.85, N. 5429-85.

2. Рувінський М.А. Кванти дії, розподіл Пуассона і нерелятивістська квантова механіка//Фіз. і хім. твердих тіл. - 1994. - N.2. - С.120-128.

3. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. СМБ. - М.: Наука. 1967. - 496 с.

4. Глауберман А.Ю. Квантовая механика. - Львів: ЛДУ, 1962. - 506с.

5. Юхновський І.Р. Основи квантової механіки. - К.: Либідь., 1995. - 352 с.

6. Girardean M.D. // Phys. Rev. - 1965. - 139 В. - Р. 500.

7. Girardean M.D. // J. Math. Phys. - 1969. - 10. - Р. 1302.

8. Каплан И.Г. Принцип запрета и неразличимость тождественных частиц в квантовой механике // УФН. - 1975. - 117, в. 4. - С.691-704.

9. Каплан И.Г. Постулат симметрии и его обоснование в рамках квантовой механики//Теоретико-групповые методы в физике, т.1. Труды международного семинара. - М.: Наука, 1980. - С.175-181.

10. Рувінський М.А., Галушак М.О., Фреїк Д.М. Курс фізики. Квантова фізика атомів і молекул. - К.: НМК ВО, 1992. - 270 с.

О.М.Возняк, П.П.Костробій

## ВПЛИВ ДИНАМІЧНИХ КОРЕЛЯЦІЙ НА ХІМІЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ДВОВИМІРНОГО ЕЛЕКТРОННОГО ГАЗУ

Використовуючи представлення статистичної суми у вигляді функціонального інтеграла одержано вираз для зсуву хімічного потенціалу двовимірного електронного газу у гаусівському наближенні.

Using a functional integral's representation for the partition a form for the chemical potential's shift of the 2-D electron gas on the gaussian approximation has been found.

Як відомо [1], при проведенні розрахунків в теорії електронного газу, що взаємодіє, слід враховувати вищі порядки теорії збурень, коректне врахування яких вимагає брати до уваги зсув хімічного потенціалу, викликаний міжелектронною взаємодією. Відомо також, що в наближеннях типу "хаотичних фаз" значення хімічного потенціалу  $\mu$  співпадає з хімічним потенціалом ідеального електронного газу  $\mu_0$ .

У даній роботі проведено розрахунок зсуву хімічного потенціалу двовимірного електронного газу в наближенні, вищому від наближення "хаотичних фаз". Вихідним для визначення хімічного потенціалу є вираз, що визначає середнє число частинок в системі

$$\langle N \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \Xi / \partial \mu}{\Xi}$$

Цей вираз дає залежність  $\langle N \rangle = \langle N(\mu) \rangle$ , з якої і можна знайти  $\mu$  як функцію  $\langle N \rangle$ . У цьому рівнянні

$\Xi = \text{Sp} \exp\{-\beta(H - \mu N)\}$  - статистична сума великого термодинамічного ансамблю;

$$H = H_0 + \frac{1}{2S} \sum_q v_q \rho_q \rho_{-q} \text{ - гамільтоніан двовимірного електронного газу;}$$

$$H_0 = \sum_k \frac{\hbar^2}{2m} a_k^+ a_k \text{ - гамільтоніан ідеальної системи;}$$

$$N = \sum_k a_k^+ a_k \text{ - оператор числа частинок;}$$

$$v_q = \frac{2\pi e^2}{q} \text{ - фур'є-образ потенціалу міжелектронної взаємодії;}$$

$$\rho_q = \sum_k a_{k+q}^+ a_k \text{ - оператор флуктуацій густини частинок;}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}.$$

Для розрахунку статистичної суми  $\Xi$ , після переходу до представлення взаємодії і використання тотожності Страгоновича - Хаббарда [4]

$$e^{-\mu^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 - 2\sqrt{\mu} y} \frac{dy}{\sqrt{\pi}}$$

одержано її представлення через функціональний інтеграл

$$\Xi = \text{Sp} e^{-\beta(H_0 - \mu N)} \int (d\varphi) \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\beta' \sum_{q \neq 0} \varphi_q(\beta') \varphi_{-q}(\beta')\right\} \times \\ \times T \exp\left\{\int_0^\beta d\beta' \sum_{q \neq 0} \sqrt{\frac{v_q}{S}} \varphi_q(\beta') \rho_q(\beta')\right\},$$

де

$$\int (d\varphi) = \prod_{\alpha=1}^3 \prod_{q \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi_q^\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi_q^{\alpha'}}{\sqrt{\pi}};$$

$\varphi_q^{\alpha c}, \varphi_q^{\alpha s}$  - дійсна і уявна частина польової величини  $\varphi_q$ ;

$\alpha = x, y, z$ ;

$T$  - впорядковуючий оператор Віка.

Далі негаусівську частину статистичної суми (члени, що містять добутки  $\varphi_q \rho_q$ ), розкладемо в ряд за теорією збурень, причому розклад здійснимо у так званий кумулянтний ряд, коефі-

ціентами якого є так звані кумулянти або семіінваріанти Тіля [5].  
Тоді для статистичної суми одержимо вираз

$$\Xi = \Xi Sp \int (d\varphi) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_q |\varphi_q|^2 + \frac{1}{m!} \sum_{m=1}^n \sum_{q_1 \omega_1} \dots \sum_{q_m \omega_m} \times \sqrt{\beta v_{q_1} \dots v_{q_m}} M_m(q_1, \dots, q_m | \omega_1, \dots, \omega_m) \varphi_{q_1} \dots \varphi_{q_m}\right\}$$

де  $M_m(q_1, \dots, q_m | \omega_1, \dots, \omega_m) = \frac{1}{\beta} \langle T \rho_{q_1} \rho_{q_m} \dots \rangle$  - m-ний кумулянт для електронного газу.

Звідси в наближенні однієї суми за хвильовим вектором вираз для числа частинок матиме вигляд:

$$N = N_0 - \frac{1}{\beta} \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} \int (d\varphi) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_q (1 - \beta M_2(q, -q))\right\} \varphi_q \varphi_{-q}}{\int (d\varphi) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_q (1 - \beta M_2(q, -q))\right\} \varphi_q \varphi_{-q}}$$

Подальші члени ряду містять дві і більше суми за хвильовим вектором і, зокрема, доданки, що містять кумулянти третього і четвертого порядків, при їх уважному розгляді можуть бути опущені. А зміна числа частинок після розкладу в ряд за ступенями хімічного потенціалу можна привести до вигляду

$$\Delta N = \sum_{q>0} v_q \frac{\partial M_2(q, -q) / \partial \mu}{1 - \beta v_q M_2(q, -q)}$$

або, враховуючи вираз для

$$M_2(q, -q) = \frac{1}{\beta} \sum_k f(\epsilon_k) \left\{ \frac{1}{i\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k+q}} - \frac{1}{i\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k-q}} \right\}$$

одержимо вираз для зсуву хімічного потенціалу

$$\Delta \mu = \mu - \mu_0 = - \frac{\sum_{q>0} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega} v_q / (1 - \beta v_q M_2(q, -q)) \sum_k \frac{\partial n_k^0(\mu_0)}{\partial \mu_0}}{\sum_k \frac{\partial n_k^0(\mu_0)}{\partial \mu_0}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{i\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k+q}} - \frac{1}{i\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k-q}} \right\}$$

Провівши інтегрування, доходимо висновку, що зсув

$$\Delta \mu = \frac{C(\beta, r_s)}{r_s^2}$$

де  $C(\beta, r_s)$  - деяка величина, що слабо залежить від температури і густини електронів.

$$r_s = \frac{\langle r \rangle}{a_0} \quad \text{- т.з. параметр Бракнера.}$$

1. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. - М.: Физматгиз, 1962. - 470 с.
2. Юхновский И.Р., Костробий П.П. Статистическая теория ограниченных ферми-систем. Приближение хаотических фаз. - К.: 1980. Препр. ИТФ - 80 - 79 Р. - 37 с.
3. Ваврух М.В., Крохмальский Т.Е., Химический потенциал взаимодействующего электронного газа и связанные с ним вопросы. - К.: 1985. Препр. ИТФ-85-119Р. - 37 с.
4. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. - М.: Наука, 1965. - 273 с.
5. Исихара А. Статистическая физика. М.: Мир, 1973. - 472 с.

Б.К.Остафійчук

## СТРУКТУРА ІОННО-ІМПЛАНТОВАНИХ ФЕРИТ-ГРАНАТОВИХ ПЛІВОК

*Обговорюються теоретичні і експериментальні результати дослідження структури іонно-імплантованих приповерхневих шарів монокристалічних епітаксійних ферит-гранатових плівок.*

*Theoretical and experimental results of ion-implanted level surfaces of monocrytalline epitaxial ferrite-garnet films research structure are discussed.*

Проблема цілеспрямованої модифікації кристалічної структури і фізичних властивостей приповерхневих шарів епітаксійних ферит-гранатових плівок (ФГП) шляхом іонної імплантації зумовлена їх використанням у різного роду функціональних пристроях, які працюють в області надвисоких частот на магнітостатичних хвилях і в електронно-обчислювальній техніці, де використовуються циліндричні магнітні домени (ЦМД) [1, 2].

У першому випадку іонна імплантација монокристалічних ФГП, в основному залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ), використовується для створення високоякісних відбиваючих ґраток чи корекції параметрів надвисокочастотних пристроїв, в другому - для подавлення жорстких ЦМД.

Незважаючи на те, що іонна імплантација тривалий час використовується у напівпровідниковій технології [3], при її застосуванні для модифікації структури і магнітних властивостей ФГП виникає ряд труднощів, пов'язаних зі складністю і відмінністю процесів, які відбуваються в багатокомпонентних плівках у порівнянні з масивними напівпровідниками. Це пов'язано, в першу чергу, зі складністю кристалічної ґратки і наявністю поля пружних деформацій, викликаних розходженням сталої ґратки плівки і підкладки [4]. По друге, епітаксійні плівки є багатокомпонентними феромагнетиками з присутністю декількох кристалографічних і магнітних підґраток, між якими існує непряма взаємодія [5], що

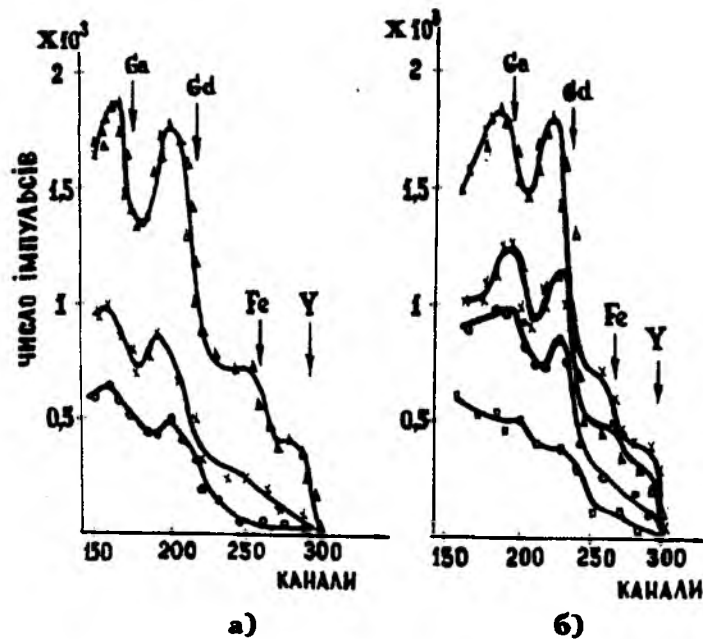
значно ускладнює аналіз взаємозв'язку дефектної структури імплантованого шару з електромагнітними властивостями.

У даній статті зроблено спробу узагальнити теоретичні і експериментальні результати дослідження трансформації кристалічної структури ФГП під впливом іонної імплантації, які отримані протягом останніх років у спільній науково-дослідній лабораторії фізики магнітних плівок НАН України при Прикарпатському університеті ім.В.Стефаника. При дослідженні структури імплантованих шарів було використано сукупність таких локальних методів спектроскопії твердого тіла, як рентгенівська фотоелектронна та ядерна гамма-резонансна спектроскопія, спектроскопія резерфордівського зворотного розсіювання іонів і метод ядерних реакцій, а також рентгенівського мікроаналізу, рентгеноструктурного аналізу, електроннографії та методи математичного моделювання і теоретичних розрахунків.

Аналіз електроннограм, результатів рентгеноструктурних досліджень і спектрів резерфордівського зворотного розсіювання (РЗР) іонів показує [6-10], що при імплантації монокристалічних плівок залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ) іонами  $He^+$ ,  $B^+$ ,  $N^+$ ,  $O^+$  процес модифікації кристалічної і магнітної структури приповерхневого шару має багато спільного. Так, при дозах нижче критичних у приповерхневому шарі товщиною  $\geq 10$  нм спостерігається розупорядкування структури, яка за своїм станом аналогічна аморфному.

Дане розупорядкування викликане не тільки точковими радіаційними дефектами, як показують спектри РЗР іонів  $He^+$  (див. мал.1), але й дефектами протяжного типу, які спостерігаються в низькодозовій імплантації і концентрація яких зростає швидше, ніж концентрація точкових дефектів з ростом дози імплантованих іонів [9]. В області критичних доз проходить зміна механізму радіаційного дефектоутворення: інтенсивне накопичення точкових дефектів і перехід імплантованого шару у повністю розупорядкований стан по всій глибині. Структурне розупорядкування викликає, певною мірою, магнітне розупорядкування, яке, як видно із аналізу конверсійних електронних месбауерівських спектрів

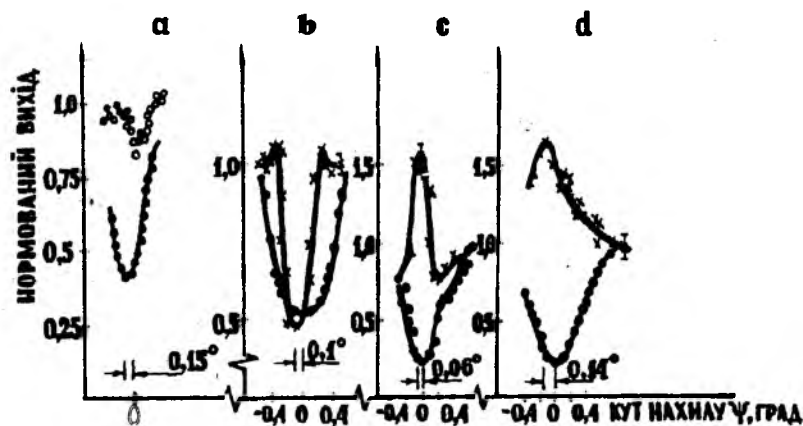
(КЕМС) і їх параметрів [10], зростає із збільшенням дози імплантації, і з досягненням критичних доз імплантований шар переходить у парамагнітний стан при кімнатній температурі.



Мал.1. Спектри РЗР іонів гелію від неімплантованої (●●●) і імплантованої іонами бору з енергією 80 кеВ і дозами  $1 \cdot 10^{15}$  (а) і  $2 \cdot 10^{15}$   $\text{см}^{-2}$  плівки ЗІГ до (×××) і після відпалу (○○○) у потоці кисню при  $950^\circ\text{C}$  протягом 5 год.: (○○○) - в осі  $\langle 111 \rangle$ ; (△△△) - у розорієнтованому напрямі.

Внаслідок того, що в залежності від енергії і типу імплантованого іона змінюється товщина модифікованого шару і вигляд профілю деформації кристалічної ґратки, а також ступінь структурного розупорядкування при імплантації конкретного іона, спостерігаються характерні для даного типу іона особливості, які знаходять відображення у зміні магнітних параметрів іонно-імплантованих плівок.

Як приклад, розглянемо імплантацію плівок ЗІГ іонами бору, яка здійснювалася з енергією 80кеВ і дозами  $3 \cdot 10^{14} \div 1 \cdot 10^{17}$   $\text{см}^{-2}$ . Як показали рентгеноструктурні дослідження і розрахунки профілів деформації на основі динамічної теорії розсіювання рентгенівських променів, спостерігається лінійна залежність максимальної відносної деформації ґратки від дози імплантації до значень доз, при яких настає взаємодія радіаційних дефектів з утворенням цілих комплексів дефектів внаслідок дифузійних процесів [10], що викликає часткову релаксацію напруг. Так, при дозі  $2 \cdot 10^{15}$   $\text{В}^+/\text{см}^2$  (мал.1) спостерігається інтенсивне утворення аморфної фази у приповерхневому шарі товщиною порядку 140нм, тоді як для дози  $1 \cdot 10^{15}$   $\text{В}^+/\text{см}^2$  товщина аналогічного шару не перевищує 40нм, і ступінь розупорядкування по товщині імплантованого шару в середньому становить 50%. Судячи з вигляду розрахованого профілю деформації ґратки для дози  $3 \cdot 10^{14}$   $\text{В}^+/\text{см}^2$ , максимального значення деформація досягає на глибині порядку 150нм, а весь деформований шар становить товщину порядку 250нм, що узгоджується з параметрами теоретично розрахованого профілю концентрації імплантованих в ЗІГ іонів бору:  $R_p = 180 \pm 5$  нм,  $\Delta R_p = 80 \pm 5$  нм. Із аналізу кривих кутової залежності виходу  $\alpha$ -частинок ядерної реакції  $^{11}\text{B}(p, \alpha)^8\text{Be}$  і зворотно розсіяних протонів (мал.2) впливає, що при низьких дозах імплантований бор займає в основному вузли аніонної підґратки [9], тоді як із збільшенням дози зростає кількість іонів бору, хаотично розподілених по об'єму ЗІГ. Наприклад, для дози  $1 \cdot 10^{14}$   $\text{см}^{-2}$  тільки 40% імплантованих іонів бору займає вузли кристалічної ґратки, тоді як для дози  $8 \cdot 10$   $\text{см}^{-2}$  - 25%. Після відпалу імплантованих плівок при  $950^\circ\text{C}$  у потоці кисню протягом 5 годин бор переходить, в основному, у вузли аніонної підґратки.



Мал.2. Кутові залежності зворотно-розсіяних протонів (●●●) і продуктів ядерних реакцій  $^{11}\text{B}(p, \alpha)^8\text{Be}$  і  $^{15}\text{N}(p, \alpha\gamma)^{12}\text{C}$  (○○○) для ферит-гранатових плівок, імплантованих іонами бору з дозою  $8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  (а) і азоту з дозами  $1,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  (b, c) і  $1,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$  (d) з енергіями 80кеВ до (а, b) і після (с, d) відпау.

При імплантації монокристалічних плівок іонами азоту, останні, як видно із мал.2, займають до відпау здебільшого вузли аніонної підґратки, тоді як після відпау практично повністю переходять у міжвузля.

Як у випадку імплантації плівок іонами бору, так і у випадку азоту, виявлено відносний зсув виходу продуктів ядерних реакцій і зворотно розсіяних протонів (мал.2), величина якого пропорційна дозі імплантованих іонів. Даний зсув можна пояснити розворотом іонних ланцюгів у результаті утворення і накопичення радіаційних структурних дефектів. Водночас можна запропонувати такий механізм даного явища. Внаслідок імплантації іонів і генерації структурних дефектів спостерігається ріст сталої ґратки приповерхневого шару. Відомо [5, 11], що при невідповідності сталих елементарних ґраток плівки і підкладки буде спостерігатися деформація плівки, що спричинює трансформацію елементарної кубічної комірки гранату у ромбоєдричну. Для характеристики цього процесу вводять параметр невідповідності  $\delta$ , який визначається

за формулою:  $\delta = (a_f/a_s)^2 - 1$ , де  $a_f$  - стала ґратки деформованого шару;  $a_s$  - стала ґратки недеформованого шару.

При значеннях  $\delta = (0,8 - 1,6)10^{-3}$  гранатові епітаксійні структури деформуються до повної відповідності сталих елементарних комірок плівки і підкладки. При збільшенні  $\delta$  механічні напруги частково знімаються за рахунок утворення дислокацій невідповідності. Очевидно, розглянутий механізм буде мати місце на границі: пошкоджений імплантований шар-плівка, оскільки, як показують обрахунки на основі рентгеноструктурних даних, у випадку імплантації ФГП іонами бору дозами  $10^{14}$  і  $8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ , параметр  $\delta$  рівний  $2,43 \cdot 10^{-2}$  і  $2,44 \cdot 10^{-1}$  відповідно. Це призводить до появи значної кількості дислокацій невідповідності і пластичної деформації, що і обумовлює викривлення каналів, а значить і зсув кривих кутової залежності, зворотно розсіяних протонів і виходу  $\alpha$ -часток із ядерної реакції  $^{11}\text{B}(p, \alpha)^8\text{Be}$  для плівок, імплантованих іонами бору. Цей зсув, рівний  $0,06^\circ$  і  $0,15^\circ$  для доз  $1,5 \cdot 10^{14}$  і  $8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  відповідно для азоту і бору, показаний на мал.2. Оскільки відносний зсув вищезгаданих кривих має місце і після відпау з незначним зменшенням його величини, то, враховуючи термостійкість радіаційних дефектів протяжного типу [8,12], логічно припустити, що ці дефекти відіграють суттєву роль в описаних процесах.

Той факт, що відносно низькі дози іонної імплантації, поряд з точковими, зумовлюють утворення у ФГП радіаційних дефектів протяжного типу, наводить на думку, що у епітаксійних структурах є фактори, які стимулюють генерацію таких дефектів. Одним із таких факторів можуть бути механічні напруги, зумовлені невідповідністю сталих ґраток плівки і підкладки, а також різницею коефіцієнтів теплового розширення. Очевидно, що величина зміни потенціальної енергії приповерхневого шару, викликаної цими напругами, буде різною в залежності від товщини епітаксійних плівок.

З цих міркувань було проведено експериментальне дослідження [4] впливу товщини плівки ЗГ на процеси дефектоутворення при іонній імплантації. Плівки різної товщини імплантувались іо-

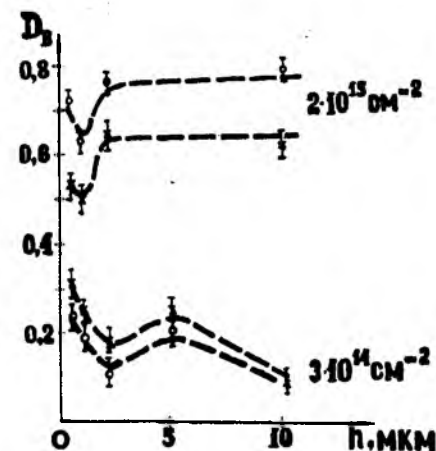
нами бору з енергією 80 кеВ і дозами  $3 \cdot 10^{14}$  і  $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$  в ідентичних умовах. На основі вимірювання інтенсивності спектрів РЗР іонів гелію від цих плівок у певному частотному інтервалі, був введений деякий параметр дефектоутворення  $\mathcal{D}_b$ , який визначався за формулою:  $\mathcal{D}_b = \frac{\chi_{\mathcal{D}} - \chi_0}{\chi_R - \chi_0}$ , де  $\chi_0$  - мінімальний вихід РЗР в осі  $\langle 111 \rangle$  неімплантованої плівки;  $\chi_{\mathcal{D}}$  - вихід РЗР в осі  $\langle 111 \rangle$  плівки, імплантованої дозою  $\mathcal{D}$ ;  $\chi_R$  - вихід РЗР у розорієнтованому напрямі.

Із аналізу кривих, зображених на мал.3, видно, що залежність  $\mathcal{D}_b$  (h) для обох доз слабо виражена, і можна тільки говорити про незначну тенденцію росту дефектоутворення для дози  $2 \cdot 10^{15} \text{ В}^+ / \text{см}^2$  із збільшенням товщини плівки від 0,49 до 10,2 мкм і незначну тенденцію спаду для дози  $3 \cdot 10^{14} \text{ В}^+ / \text{см}^2$ . Необхідно зауважити, що із аналізу спектрів РЗР іонів гелію, отриманих від імплантованих плівок різної товщини [4], випливає наявність різної кількості і типу радіаційних дефектів в імплантованих шарах для доз  $3 \cdot 10^{14}$  і  $2 \cdot 10^{15} \text{ В}^+ / \text{см}^2$ .

Для першої дози у приповерхневому шарі домінують лінійні радіаційні дефекти, тоді як для дози  $2 \cdot 10^{15} \text{ В}^+ / \text{см}^2$  приповерхневий шар структурно розупорядкований і за своїм станом близький до аморфного. Тому при аналізі кривих на мал.3 необхідно врахувати, що для кожної із доз основний тип дефектів різний, а значить і фізичні причини, які впливають на хід кривої  $\mathcal{D}_b$ (h), можуть бути різними. Однак, в обох випадках спостерігається деякий мінімум радіаційного дефектоутворення.

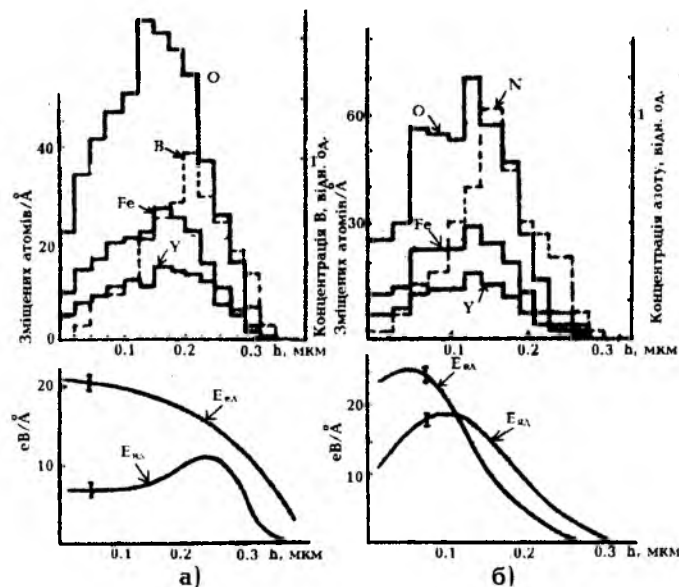
Достовірність отриманих результатів у певній мірі підтверджується аналогічним ходом кривої залежності величини відносної деформації кристалічної ґратки  $\frac{\Delta a}{a}$  іонів імплантованих плівок від їх товщини [13]. Таким чином, отримані результати дозволяють зробити висновок, що ступінь структурного розупорядкування в процесі іонної імплантації ФГП, внаслідок напруг, зумовле-

них неузгодженістю сталої ґратки і термічного коефіцієнта підкладки і плівки, залежить від товщини плівки.



Мал.3. Залежність параметра дефектоутворення від товщини плівок ЗІГ, імплантованих іонами бору з енергією 80кеВ: (ooo) - усереднення за піком пошкодження ітрію, (xxx) - усереднення за піком пошкодження заліза в спектрах РЗР іонів гелію.

Виконані експериментальні дослідження дозволяють міркувати не тільки про переважування того чи іншого типу радіаційних дефектів у залежності від дози імплантованих іонів, але і встановити, як уже говорилося раніше, кристалохімічне положення імплантованих іонів у структурі гранату. Аналіз виконаних рентгеноструктурних досліджень, спектрів РЗР, ефекту Месбауера, дозволив однозначно встановити радіаційну стійкість кристалічних підґраток у структурі гранату. Із ростом набору дози іонної імплантації кристалу гранату спочатку найбільшому руйнуванню піддається аніонна підґратка, потім - октаедрична. Тетраедрична підґратка, в силу своєї геометрії, є найбільш стійкою по відношенню до радіаційного опромінення.



Мал.4. Теоретично розраховані профілі імплантованих іонів бору (а) і азоту (б) і профілі їх енергетичних втрат, а також профілі зміщених іонів матриці в плівках залізо-ітрієвого гранату. Енергія імплантації 80кеВ.

На основі дослідження кінетики відпалу радіаційних дефектів у ФГП, імплантованих іонами бору, і математичного моделювання, у роботі [6] було запропоновано динамічну модель приповерхневого пошкодженого шару, суть якої полягає в тому, що іонна імплантація руйнує структуру монокристалічних плівок, селективно по відношенню до елементного складу, і кристалічних підгруп з формуванням складної пошарової структури приповерхневого шару: поверхневий аморфний шар; деформовано-дефектний кристалічний шар; внутрішній аморфний шар; пружно-деформований кристалічний шар. З досягненням критичних доз структура імплантованого шару трансформується в стан, аналогічний аморфному, по всій глибині.

Оскільки отримані результати дослідження структури імплантованих іонами бору, азоту і кисню епітаксійних плівок методами електронографії, каналування, рентгеноструктурними і конверсій-

ної електронної месбауерівської спектроскопії дозволили стверджувати, що зародження аморфної фази з поверхні спостерігається раніше, ніж в області основних ядерних втрат імплантованих іонів, то сам механізм зародження на поверхні аморфної фази не зовсім зрозумілий, бо поверхня є зоною стоку і рекомбінації дефектів. Це робить проблематичною можливість досягнення їх критичної концентрації. Ситуація зміниться, якщо припустити, що на поверхні плівки якимось чином утворюється тонкий аморфний шар, який протидіє виходу і рекомбінації радіаційних дефектів.

У роботі [14] були виконані теоретичні розрахунки методом Монте-Карло профілів імплантованих іонів бору, азоту і кисню в епітаксійні плівки, а також профілі зміщених атомів матриці і профілі енергетичних втрат. Аналіз розрахованих профілів, зображених на мал.4, а також форми об'єму каскаду зіткнень налітаючого при імплантації іона в кристал гранату [14], дозволив запропонувати один із можливих механізмів структурного розупорядкування у приповерхневому шарі. Його суть полягає в тому, що перехід структури тонкого поверхневого шару (порядку 10нм) у аморфний стан можливий у результаті іонізаційного піка, обумовленого втратою енергії налітаючим іоном шляхом збудження електронної підсистеми кристалу. Оскільки з ростом атомного номера імплантованого іона електронні втрати зменшуються ( $E_{eA} = 63\%$ ,  $E_{eN} = 53\%$ ,  $E_{eO} = 50\%$ ) і збільшуються ядерні, а також міняється величина втрат вздовж треку іона, очевидно, даний механізм буде відігравати суттєву роль при імплантації іонів типу азоту.

1. Пранявичус Л., Дудонис Ю. Модификация свойств твердых тел ионными пучками. - Вильнюс: Мокслас, 1980. - 239 с.
2. Элементы и устройства на цилиндрических магнитных доменах //Под ред. Н.Евтихиева, Б.Наумова. - М.: Радио и связь, 1987. - 488 с.
3. Риссел Х., Руте И. Ионная имплантация. - М.: Наука, 1983. - 320 с.
4. Кристаллическая и магнитная структура имплантированных слоев монокристаллических пленок железо-иттриевого граната // Остафийчук Б.К., Олейник В.А., Пылыпив В.М. и др.// Препринт ИМФ 1,91, г.Киев., 1991. - 70 с.



**Д.М.Фреїк, Я.П.Салій, С.Д.Кирста,  
В.М.Мельник, Г.Д.Матеїк**

### **ВПЛИВ ВЛАСНИХ АТОМНИХ ДЕФЕКТІВ НА ПАРАМЕТР ГРАТКИ ГЦК-КРИСТАЛІВ $A^{IV}B^{VI}$**

5. Gilleo M.A. Ferromagnetic insulator: garnets-ferromagnetic materials. - V.2. - Ed. by Wohlfarth, North-Holland Publishing Company, 1980. - P.1-53.
6. Остафійчук Б.К., Федорив В.Д., Кравец В.И. и др. // Структура приповерхностного слоя феррит-гранатової плівки, імплантованої іонами бора // Металлофізика и новейшие технологии. - 1995. - Т.17. - С.67-72.
7. Немошкаленко В.В., Остафійчук Б.К., Олейник В.А. и др. Структура ФГП, імплантованих іонами бора // Письма в Журн. технич. физ. - 1989. Т.15. - Вип. 23 - С.33-37.
8. Остафійчук Б.К., Пылыпив В.М., Олейник В.А. и др. Структурное и магнитное разупорядочение в імплантованих іонами азота плівках залізо-итриєвого граната до и после отжига // Письма в Журн. технич. физ. - Т.16. - Вип. 15. - С.82-84.
9. Немошкаленко В.В., Остафійчук Б.К., Олейник В.А. и др. Степень структурного и магнитного розупорядочення в феррит-гранатових плівках, імплантованих іонами бора // Физ. тверд. тел. - 1990. - Т.32. - С.707-713.
10. Остафійчук Б.К., Пылыпив В.М., Сенкевич А.И. и др. Структурные и спектральные исследования імплантованого бором залізо-итриєвого граната // Письма в Журн. тех. физ. - 1988. - Т.14. - Вип. 5. - С.466-469.
11. Рукин О.Г., Агеев А.Н., Духовская Е.Л. Деформация кристаллической решетки эпитаксиальных пленок иттрий-железного граната // Журн. технич. физ. - 1982. - Т.32. - Вип. 12. - С.2411-2415.
12. Ostafiychuk B.K., Pilipiv V.M., Semen V.T. and ath. // Mater. Science Inter. Symposium for High Technologies. - Dresden, 1990. - P.352-353.
13. Кравец В.И., Остафійчук Б.К., Олиховский С.И. Определение профиля деформаций в ионно-імплантованих плівках залізо-итриєвого граната с помощью кинематической теории рассеивания // Металлофізика. - 1991. - Т.13. - №6. - С.102-106.
14. Остафійчук Б.К., Ткачук В.М., Ворончак О.М., Яворский Б.И. О возможном механизме аморфизации поверхности феррит-гранатовых пленок вследствие ионной имплантации // Металлофізика и новейшие технологии. - 1994. - Т.16. - №8. - С.51-54.

*Зроблено розрахунок впливу точкових дефектів - вакансії, міжвузловинні атоми, пари Френкеля - на зміну сталої ґратки в кристалах з ґранецентрованою кубічною (ГЦК) структурою. На основі порівняння експериментальних результатів з даними розрахунків зроблено висновок про переважаючий вид дефектів у сполуках на основі  $A^{IV}B^{VI}$ . Показано, що при синтезі телуриду олова утворюються вакансії в підґратці металу, а імплантація атомів Pb у плівках PbTe призводить до вакансій телуру. Радіаційне опромінення плівки PbSe, PbTe і SnTe високоенергетичними частинками викликає утворення пар Френкеля.*

*The calculation of the point defects (such as vacancies, interstitial atoms, Frenkel pairs) influence determination on the lattice constant change in crystals of free structure has been made. After comparing experimental results and theoretical data the conclusion about the predominative type of defects in compounds based on  $A^{IV}B^{VI}$  has been made. It has been shown that sintesis of PbTe leads to the vacancie creation in metal sublattice, and implantation of Pb atoms in PbTe leads to Te vacancies creation radiational irradiation of PbSe, PbTe and SnTe with the high-energy charged particles led to Frenkel pairs creation.*

Відомо [1,2], що в халькогенідах свинцю і олова, змінюючи концентрацію власних атомних дефектів, можна керувати їх властивостями. Зараз немає єдиної думки в питанні про тип переважаючих дефектів в  $A^{IV}B^{VI}$  [3]. Так, при обробці даних з високотемпературного відпалу  $Pb_{0,8}Sn_{0,2}Te$  і  $Pb_{0,73}Sn_{0,07}Se$  вважалося, що основним типом дефектів є двозарядні дефекти за Шоткі [4]. Уявлення про переважаючий вид точкових дефектів у підґратці металу в PbTe, збагаченому Te, використано для

пояснення результатів позитронної анігляції. Вакансійна дефектність, переважно в підґратці халькогену висувається як можлива причина виникнення додаткового внеску в низькотемпературну теплоємність n-PbS, а також як домінуючий фактор, що забезпечує дифузію Te в  $PbTe_{1-x}Se_x$  при високих температурах.

З метою ідентифікації типу власних атомних дефектів у сполуках на основі халькогенідів олова і свинцю змодельовано кристал з ГЦК-ґраткою за методом Віньярда [6]. Для побудови моделі вибрано потенціал міжатомної взаємодії Ленарда-Джонса:

$$\varphi(r) = 4c[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6],$$

де  $r$  - відстань між центрами атомів,  $c$ ,  $\sigma$  - емпіричні параметри.

Оскільки електронна будова іонів  $Pb^{2+}$ ,  $(Sn^{2+})$  і  $Te^{2-}$  ( $Se^{2-}$ ) аналогічна атому Хе, то можна в якості параметрів  $c$  і  $\sigma$  взяти значення  $c=0,02$  еВ,  $\sigma = 3,98 \text{ \AA}$  [7].

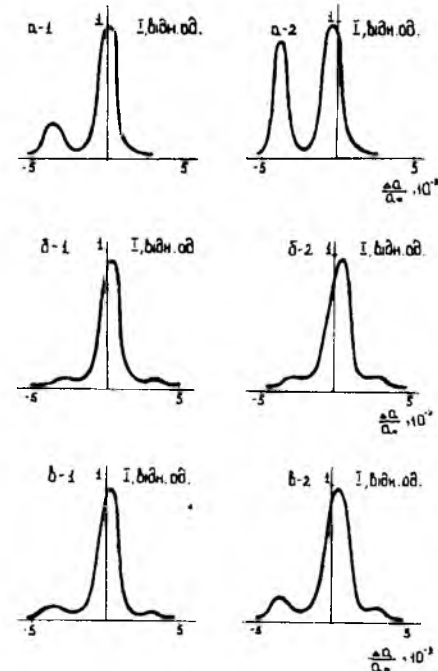
Розглядалася область навколо дефекту (кластер), яка має структуру вибраного матеріалу і змінюється під його впливом. Кластер задавався у вигляді куба з розмірами  $8 \times 8 \times 8$  половинок сталої ґратки для міжвузловинних атомів і розміром  $9 \times 9 \times 9$  для вакансій. Розподіл міжплощинних відстаней  $f(\Delta a/a_0)$  деформованого власними атомними дефектами кластеру можна апроксимувати гаусовою залежністю:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\epsilon^2}}$$

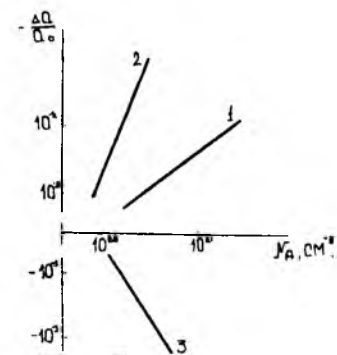
де  $x = \Delta a/a_0$ ;  $\epsilon$  - стандартне відхилення нормального розподілу (для нашого випадку  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ ).

Розподіли міжатомних відстаней, віднормовані на одиницю для максимальних значень, представлені на мал.1. Збільшення концентрації дефектів призводить як до зростання додаткових, так і зміщення основного максимумів. Збільшення концентрації вакансій зумовлює зменшення сталої ґратки (мал.2, крива 1), а міжвузлових атомів - її зростання (мал.2, крива2). У випадку

френкелівських пар маємо залежність, подібну до залежності для вакансій, тільки значно крутішу (мал.2, крива 3).



Мал. 1.



Мал. 2.

Порівняння модельних розрахунків з результатами експерименту дозволяє з більшою впевненістю визначити тип основних дефектів. Так, для телуриду олова період ґратки в границях області гомогенності визначається співвідношенням [1]:

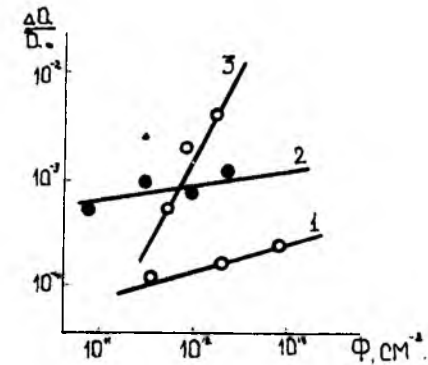
$$a (\text{Å}) = 6,327 - 1,7 \cdot 10^{-23} p,$$

де  $a_0 = 6,327 \text{ Å}$  - величина періоду ґратки SnTe, насиченого оловом,  $p (\text{см}^{-3})$  - концентрація дірок. Збільшення концентрації дефектів  $N_D$  (яка двічі менша від концентрації дірок  $N_D = 0,5 \cdot p$  для двозарядних дефектів) веде до лінійного зменшення періоду ґратки близько до вакансійного механізму дефектоутворення. Це пов'язано з утворенням вакансій олова в підґратці металу SnTe при збільшенні вмісту телуру в границях області гомогенності [1].

Імплантація атомів Pb в плівках PbTe призводить до зменшення сталої ґратки на  $0,0085 \text{ Å}$  ( $\Delta a/a_0 = -13,2 \cdot 10^{-4}$ ), при концентрації імплантантів до  $N_D = 4 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ . Додаткова імплантація атомами Te змінює сталу ґратки на  $0,0055 \text{ Å}$  ( $\Delta a/a_0 = -8,5 \cdot 10^{-4}$ ). Таким чином, можна стверджувати, що у першому випадку утворюються вакансії телуру, а у другому вони зникають за рахунок імплантованих атомів телуру.

Про вакансійний механізм дефектоутворення свідчать також дослідження епітаксійних шарів  $n\text{-Pb}_{0,8}\text{Sn}_{0,2}\text{Te}$ , вирощених з парової фази в умовах конгруентної сублімації. Зміна концентрації електронів від  $10^{17}$  до  $8 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  зумовлює зменшення параметра ґратки з  $6,43337 \text{ Å}$  до  $6,43315 \text{ Å}$ .

Опромінення плівок селеніду, телуриду свинцю і телуриду олова альфа-частинками, енергією  $\sim 5 \text{ MeV}$ , дозами до  $\Phi = 4,3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$  призводить до зменшення параметра ґратки (мал.3) [8].



Мал. 3.

Це вказує на те, що переважаючими дефектами можуть бути вакансії, або ж пари Френкеля.

Зауважимо, що експериментальні результати (мал.3) можна апроксимувати залежністю:

$$\ln \frac{\Delta a}{a_0} = A + B \cdot \ln \Phi.$$

## Таблиця

**Коефіцієнти функцій, які апроксимують експериментальні значення залежності зміни сталої ґратки  $\Delta a/a_0$  плівок PbSe, PbTe і SnTe від інтегрального потоку  $\alpha$ -частинок  $\Phi$  ( $\ln (\Delta a/a_0) = A + B \ln \Phi$ ).**

Плівки	A	B	A/B
PbSe	$-56 \pm 3$	$1.8 \pm 0.1$	$31 \pm 4$
PbTe	$-11 \pm 2$	$0.15 \pm 0.7$	$80 \pm 50$
SnTe	$-6.6 \pm 0.8$	$0.28 \pm 0.03$	$58 \pm 0.8$

Значення параметрів A і B для плівок наведені в таблиці. Видно, що відношення A/B близькі між собою для всіх плівок. Значення B для PbSe в 10 разів більше за відповідні значення для PbTe і SnTe, які між собою практично збігаються. Це пов'язано з

тим, що середня швидкість зміни концентрації радіаційних дефектів ( $\Delta N_D / \Delta \Phi$ ) різна для плівок різного хімічного складу. Так, у випадку утворення пар Френкеля, для плівок PbSe вона складає  $\sim 10^{11} \text{ см}^{-1}$ , а PbTe і SnTe -  $10^8 - 10^6 \text{ см}^{-1}$ .

1. Абрикосов Н.Х., Шелимова Л.Е. Полупроводниковые материалы на основе соединений  $A^{IV}B^{VI}$ . - М.: Наука, 1975. - 196 с.
2. Зломанов В.П., Новоселова А.В. Р-Т-Х - диаграммы состояния системы металл-халькоген. - М.: Наука, 1987. - 208 с.
3. Заячук Д.М., Шендеровський В.А. Власні дефекти та електричні процеси в  $A^{IV}B^{VI}$  // Укр.фіз.журн. - 1991. - Т.36. - N1. - С.1692-1713.
4. Сизов Ф.Ф. Нестехиометрические дефекты в узкощелевых полупроводниках  $A^{IV}B^{VI}$  // Изв. АН СССР: Неорганич. матер. - 1988. - Т.24. - N12. - С.1972-1976.
5. Фреїк Д.М., Прокопів В.В., Межиловская Л.И. и др. Квазихимический расчёт равновесия собственных дефектов в плёнках PbSe // Изв. АН СССР : Неорганич. матер. - 1990. - Т.26. - N1. - С.55-59.
6. Виньярд Дж. Динамика радиационного повреждения // Успехи физ.наук. - 1961. - Т.74. - С.445-450.
7. Матвеев А.В., Тольятинский И.И. Полупроводники с узкой запрещённой зоной // Матер. VII Всесоюз. симпозиума. - Львов, 1988. - С. 213.
8. Фреїк Д.М., Миколайчук А.Г., Огородник Я.В. Релаксация и накопление дефектов в эпитаксиальных слоях PbSe при  $\alpha$ -облучении // Физ.твёрд.тела. - 1990. - Т.32. - Вып. 9. - С. 2742-2745.

**М.М.Яцура**

## ПРО ЕЛЕКТРОННУ СТРУКТУРУ ЦЕМЕНТИТУ, ВИДІЛЕНОГО ІЗ ВІДПУЩЕНОЇ КРЕМНІЄВОЇ СТАЛІ

*Вивчені рентгенівські К-краї поглинання і  $K\beta_5\beta''$ -емісійна смуга Fe та  $K\beta_{1x}$ -емісійна смуга Si в карбіді  $(Fe_{1-x}Si_x)_3C$  виділеного із відпущеної кремнієвої сталі.*

*Встановлено, що атоми Si, які розчинені в цементиті, приводять до істотних змін в електронній структурі кристала карбиду. Атоми Si в  $(Fe_{1-x}Si_x)_3C$  мають міцні зв'язки лише з атомами заліза (Fe-Si). Наявність зв'язків Si-C і Si-Si в легованому цементиті малоімовірна.*

*There has been studied x-ray k-end of absorption and  $K\beta_5\beta''$ -emission band, of Fe, as well as  $K\beta_{1x}$ -emission band of Si in carbide  $(Fe_{1-x}Si_x)_3C$  obtained from tempered silicon steel.*

*If has been proved that Si atoms dissolved in cementite cause essential changes in the electron structure of carbide crystals. Si atoms in  $(Fe_{1-x}Si_x)_3C$  have strong bonds only with Fe atoms (Fe-Si). Si-C and Si-Si bonds are unlikely to be present in alloyed cementite.*

В [1] показано, що кремній, знаходячись в сталі в якості легуючої добавки, може розчинятися в цементиті. Його вміст у карбіді залежить від режиму термообробки сталі. В [2], за допомогою гамма-резонансної спектроскопії (ГРС), зроблена спроба вивчення впливу кремнію, розчиненого в цементиті, на стан останнього. Однак, ускладнення тонкої структури ГРС, внаслідок присутності дрібних суперпарамагнітних частинок в екстрагованому карбіді, а також наявності різного роду структурних дефектів в решітці карбиду, ускладнює вивчення впливу кремнію на стан карбиду.

З цієї точки зору, перспективним є вивчення рентгенівських К-спектрів поглинання Fe і останніх емісійних смуг атомів Fe і Si в цементиті, тонка структура і параметри яких не піддаються впливу вказаних вище факторів.

Метою даної роботи є подальше вивчення стану цементиту кремнієвої сталі, відпущеної при різних температурах і тривалостях із застосуванням методу рентгенівської спектроскопії.

Об'єктом дослідження була кремнієва сталь (1%С і 3%Si). Злитки вагою 40-50 г виплавлялися в дуговій печі, в середовищі аргону, із шихт, складених з вуглецевої сталі У10 і чистого кремнію. Зразки гартувалися від 1050-1100 °С, з подальшим відпуском при температурах 450, 600 і 680 °С. Тривалість відпуску була від 10 до 360 хвилин. Карбідна фаза виділялася шляхом електролітичного розчинення досліджуваних зразків сталі [3]. Виділені карбідні порошки піддавалися рентгенофазовому аналізу. На рентгенограмах зафіксовані були тільки лінії ромбічного карбіду.

Рентгенівські спектри (К-краї поглинання і  $K\beta_1\beta''$  - емісійна смуга Fe в цементиті - реєструвалися фотографічним методом в першому порядку відбивання від площини(1340) кристала кварцу на вакуумному спектрографі ДРС-2.  $K\beta_{1x}$ -емісійна смуга кремнію реєструвалася при відбиванні від площини(10 $\bar{1}0$ ) кристала кварцу за методикою, описаною в [4].

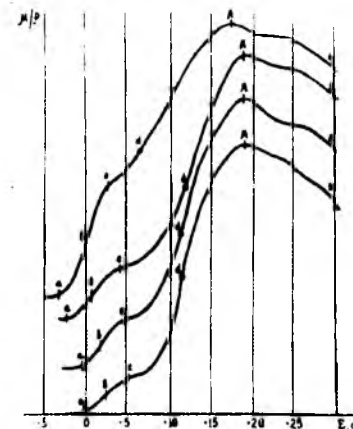
На мал.1-3 приведені рентгенівські К-краї поглинання атомів Fe в карбідах кремнієвої сталі, відпущеної при різних температурах і тривалостях відпуску. Для порівняння на кожному малюнку приведені також К-краї поглинання атомів Fe в карбіді вуглецевої сталі У10, відпущеної при відповідних температурах.

Із мал.1-3 видно, що хід коефіцієнта поглинання К-краю Fe карбідів кремнієвої сталі і карбідів вуглецевої сталі неоднаковий. Різне також енергетичне положення характерних точок спектрів. Найбільш істотні зміни спектра спостерігаються в області початкового поглинання краю. Причому найменша інтенсивність початкового поглинання спостерігається для К-краю поглинання Fe в цементиті кремнієвої сталі, відпущеної при 450 °С протягом 10 хв. (мал.1, кр.1), в якому міститься  $\approx 3\%$  Si. Всі характерні точки К-краю Fe цього карбіду, в порівнянні з подібними точками К-краю Fe карбіду вуглецевої сталі, зсунуті в бік високих енергій. При збільшенні тривалості відпуску (вміст кремнію в цементиті при цьому зменшується) інтенсивність початкового поглинання збільшується,

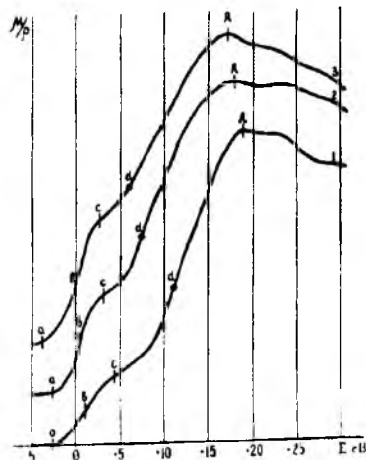
а величина зсувів характерних точок країв зменшується. Однак, цікаво відмітити, що навіть при шестигодній витримці тонка структура К-краю Fe карбіду кремнієвої сталі ще істотно відрізняється від відповідних деталей тонкої структури К-краю Fe в Fe<sub>3</sub>C.



Мал.1. К-краї поглинання Fe в цементиті кремнієвої сталі, відпущеної при температурі 450 °С протягом 10 хвилин (1), 2-х годин (2), 6-ти годин (3) і вуглецевої нелегованої сталі (У10), відпущеної при температурі 450 °С протягом 10 хвилин (4).



Мал.2. К-краї поглинання Fe в цементиті кремнієвої сталі, відпущеної при температурі 600 °С протягом 10 хвилин (1), 2-х годин (2), 6-ти годин (3) і вуглецевої нелегованої сталі У10, відпущеної при температурі 450 °С протягом 2-х годин (4).



Мал.3. К-краї поглинання Fe в цементиті кремнієвої сталі, відпущеної при температурі 680 °С протягом 20-ти хвилин (1), 2-х годин (2) і вуглецевої нелегованої сталі У10, відпущеної при температурі 680 °С на протязі 2-х годин (3).

Подібна закономірність зміни тонкої структури К-краю поглинання Fe спостерігається і для карбідів кремнієвої сталі, відпущеної при температурах 600 і 680 °С (мал.2, 3). При температурі відпуску 680 °С (2 год) відмінність в тонкій структурі спектрів карбідів мінімальна, хоч деякі характерні точки краю ще зсунуті в бік високих енергій.

Спостережувані зміни тонкої структури К-країв поглинання Fe в карбідах кремнієвої сталі можна пов'язати із впливом атомів кремнію, які знаходяться в решітці цементиту. Зменшення інтенсивності початкової області поглинання пояснюється як зменшенням числа вакансій в *spd*-гібридизованій смугі кристала карбіду внаслідок заповнення станів цієї смуги валентними *sp*-електронами кремнію, так і зміною перекриття 3d-, 4p- станів атомів заліза.

Зміщення енергетичного положення характерної точки (точки "в") початкової області поглинання і середини головного краю (точки "d") в бік високих енергій може бути також пояснено заповненням вакансій в *spd*-гібридизованій смугі 2p-

електронами кремнію, які знаходяться в решітці цементиту. Зменшення вмісту легуючого елементу (Si) в цементиті, відповідно вищевикладеному, повинно приводити до збільшення вільних станів в *spd*-гібридизованій смугі, що проявляється у збільшенні інтенсивності початкової області поглинання краю і зміщенні характерних точок краю в довгохвильовий бік. Аналіз К-країв поглинання Fe карбідів кремнієвої сталі показує, що, при підвищенні температури відпуску і збільшенні часу витримки, вони за формою і положенням наближаються до К-країв поглинання Fe цементиту відпущеної вуглецевої нелегованої сталі. Найбільш близьким за формою і положенням до К-краю Fe цементиту вуглецевої сталі є К-край Fe цементиту кремнієвої сталі, відпущеної при температурі 680 °С протягом двох годин (мал.3, кр.2), де, за даними [1], міститься лише 0,2 % Si.

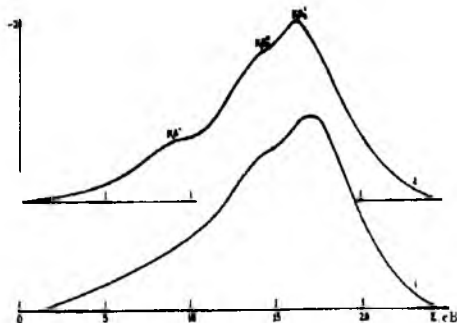
Таким чином, кремній, який знаходиться в цементиті, навіть в невеликих кількостях (0,2%), здатний викликати зміну енергетичного стану атомів Fe в цементиті, що впливає на тонку структуру і енергетичне положення К-країв поглинання Fe.

Однак, в кремнієвих сталях процеси карбідоутворення проходять більш в'яло, ніж у вуглецевих [5]. Кремній, знаходячись в сталі в якості легуючого елемента, зсуває температурну межу утворення цементиту на 140° в бік високих температур. Тому можна припустити, що цементит, який виділяється в кремнієвій сталі при температурі 450 °С, на протязі 10-ти хвилинного відпуску характеризується дефіцитом по вуглецю [5]. Виходячи з цього, можна вважати, що спостережувані зміни в спектрах поглинання Fe карбідів кремнієвої сталі, відпущеної при відносно низьких температурах або невеликих витримках, викликані не тільки присутністю кремнію на решітці цементиту, але й дефіцитом по вуглецю. Підвищення температури відпуску або збільшення тривалості витримки приведе до ліквідації дефіциту по вуглецю. Тому можна вважати, що після двогодинної витримки при будь-якій температурі відпуску (вище 400 °С) спостережувані зміни в спектрах поглинання Fe карбідів кремнієвої сталі

викликані в основному впливом кремнію на електронну структуру кристала карбіду.

З метою отримання більш повної інформації про вплив кремнію, розчиненого в цементиті, на електронну структуру кристалу карбіду, паралельно із вивченням К-країв поглинання Fe вивчена також  $K\beta_5\beta''$ -емісійна смуга заліза цементиту, який містить 1,4% Si.

Із мал.4, кр.2 видно, що  $K\beta_5\beta''$ -смуга Fe в карбіді кремнієвої сталі характеризується трисмуговою структурою, подібною до структури  $K\beta_5\beta''$ -смуги Fe в цементиті вуглецевої сталі [6]. В довгохвильовій частині смуги спостерігається чітко відособлена, досить інтенсивна  $K\beta''$ -підсмуга. Цікаво, що в спектрі Fe карбіду нелегованої сталі, відпущеної також при 450 °С (2 год),  $K\beta''$ -підсмуга менш відособлена (мал.4, кр.1).



Мал.4.  $K\beta_5\beta''$ -емісійної смуги Fe в цементиті вуглецевої нелегованої У10 (1) і кремнієвої (2) сталей. Температура відпуску 450<sup>0</sup>. Час витримки дві години.

Основна смуга К-спектра Fe карбіду кремнієвої сталі, як і у карбіду вуглецевої нелегованої сталі, розщеплена на дві підсмуги, які відображають локалізовані ( $K\beta_5''$ ) і колективізовані ( $K\beta_5'$ ) електронні стани. Як видно із мал.4 і таблиці 1, відносна інтенсивність довгохвильової підсмуги  $K\beta_5''$  спектра Fe в карбіді кремнієвої сталі (кр.2) дещо вища від такої ж в спектрі карбіду вуглецевої нелегованої сталі (кр.1).

Таблиця 1.

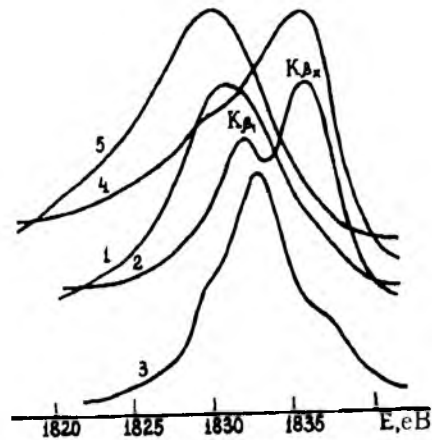
Характеристики  $K\beta_5\beta''$ -емісійної смуги Fe в карбідах, виділених із відпущених нелегованої та кремнієвої сталей

Сталь	Температура відпуску, °С	Тривалість відпуску, хв.	Положення, еВ	Ширина на 1/2 висоти, еВ	$K\beta_5' - K\beta_5''$	$\frac{K\beta_5''}{K\beta_5'}$	$\frac{K\beta''}{K\beta_5''}$	Індекс асиметрії
У10	450	120	0	9.2	3.2	0.70	-	0.46
У10 + 3%Si	450	120	-0.9	8.4	2.8	0.79	0.32	0.65
Помилка			±0.3	±0.3	±0.3	±0.01	±0.01	±0.02

Спостережувані зміни в  $K\beta_5\beta''$ -смузі Fe карбіду кремнієвої сталі свідчать про часткове залучення валентних електронів атомів кремнію в d-смузу Fe, що призводить до перебудови характеру міжатомного зв'язку. Окрім того, це підтверджується довгохвильовим зміщенням центра ваги  $K\beta_5$ -смуги Fe в карбіді кремнієвої сталі відносно  $K\beta_5$ -смуги Fe карбіду вуглецевої нелегованої сталі [7], а також зміною інших характеристик (півширина, індекс асиметрії і т.д., (таблиця 1))  $K\beta_5\beta''$ -смуги Fe в цементиті.

Не виключено, що збільшення відносної інтенсивності  $K\beta_5''$ -підсмуги Fe свідчить про появу ковалентної складової зв'язку між атомами заліза і кремнію (Fe-Si). Це припущення знаходить своє підтвердження в характері змін  $K\beta_{1x}$ -емісійної смуги кремнію, розчиненого в цементиті.

Аналіз тонкої структури і параметрів  $SiK\beta_{1x}$ -смуги в цементиті (мал.5, кр.1) вказує, перш за все, на різку її відмінність за формою від такої ж в чистому кремнії (кр.2). Форма отриманої смуги найбільш близька до такої в FeSi (кр.5), тоді як відмінність її від подібної смуги в SiC (кр.4) і  $SiO_2$  (кр.3) не викликає сумніву.



Мал.5.  $K\beta_{1x}$  - емісійні смуги кремнію в цементиті (1), Si КП-ІС (2),  $SiO_2$  (3), SiC (4) і FeSi (5).

\* Для дослідження був вибраний цементит, який містить 1.4% Si.

За даними розрахунків енергетичних зон кремнію [8] і інтерпретації експериментальних результатів [8, 9] двогорбність емісійної смуги кремнію пояснюється наявністю в ньому двох підзон ( $\pi$  і  $\sigma$ ) змішаних s-, p- станів, які беруть участь в тетраедричних напрямках зв'язків Si-Si  $\sigma$ -компонента, яка відображає найбільш локалізовану частину цих зв'язків, тяжіє до області енергій, яка проявляється в довгохвильовому максимумі  $SiK\beta_{1x}$ , тоді як  $\pi$ -компонента, яка відображає високоенергетичні, найменш локалізовані sp-стани, проявляється в короткохвильовому максимумі  $SiK\beta_x$ . Наявність в спектрі кремнію, розчиненого в цементиті, інтенсивного максимуму  $K\beta_1$  може бути витлумачено, як вказівка на те, що атоми кремнію мають міцні, повністю або частково локалізовані зв'язки з атомами Fe, подібно до тих, які існують в моносиліциді заліза FeSi. На користь цього припущення свідчить і подібність форми  $SiK\beta_{1x}$  в цементиті, легovanому кремнієм і FeSi. Цей висновок підтверджується і практично однаковою енергією  $SiK\beta_{1x}$ -смуги в FeSi і цементиті, легovanому кремнієм. Обидва вони майже однаково зміщені в довгохвильовий бік відносно  $SiK\beta_{1x}$  - в чистому кремнії. Все це дає можливість зробити висновок, що кремній в  $(Fe_{1-x}Si_x)_3C$  має міцні зв'язки з атомами Fe. Відмінність спектра  $SiK\beta_{1x}$  - в цементиті, легovanому кремнієм, від такого ж в SiC і в чистому кремнії робить мало імовірним наявність в легovanому кремнієм цементиті зв'язків Si-Si і Si-C.

Таким чином, виходячи із вище викладеного, можна констатувати що:

1) атоми кремнію, які розчинені в цементиті, приводять до істотних змін в електронній структурі кристала карбіду. Зокрема, в легovanому цементиті відбувається відтягування частини валентних електронів атомів кремнію до атомів заліза, при цьому зменшується густина вільних станів гібридизованої spd-смуги кристала карбіду;

2) атоми кремнію, які розчинені в цементиті, мають міцні зв'язки тільки з атомами Fe (Si-Fe). Наявність зв'язків Si-C і Si-Si в легovanому цементиті мало ймовірна.



1. Арбузов М.П., Котляр Б.И., Яцура М.М. Исследование цементита, выделенного из отпущенной кремнистой стали (рукопись деп. в ВИНТИ, 1976, №26-76).
2. Арбузов М.П., Киричок П.П., Котляр Б.И., Яцура М.М. Мессбауэровское исследование карбидов, выделенных из углеродистой кремнистой стали // Химическая связь в кристаллах и их физические свойства. - Т.1. - Минск: Наука и тех., 1976 - С.103.
3. Арбузов М.П., Рогов И.И. Об электролитическом экстрагировании карбидной фазы из отпущенной стали // Сб. научн. работ лаб. металлофизики АН УССР. - К.: Изд-во АН УССР, 1948. - С.66.
4. Блохин М.А. Методы рентгеноспектральных исследований. - М.: Физматгиздат, 1959. - С.386.
5. Арбузов М.П., Бушуев Ю.Е. Карбидообразование при отпуске закалённой кремнистой стали // Металловедение и термическая обработка металлов. -1970. - №1. - С.13.
6. Арбузов М.П., Котляр Б.И., Тадеуш О.Х., Яцура М.М. Исследование процессов карбидообразования в железоуглеродистых плёнках рентгеноспектральным методом. (Рукопись деп. в ВИНТИ, 1974, №1834-74).
7. Даутов Л.М., Кадыкенов М.М., Каипов Д.К., Немошкаленко В.В. Интерпретация рентгеновских спектров переходных элементов первого большого периода в приближении свободных ионов // Электронная структура переходных металлов, их сплавов и соединений. - К.: Наук. думка, 1974. - С.320.
8. Жураковский Е.А. Электронная структура тугоплавких соединений. - К.: Наук. думка, 1976. - С.380.
9. Wiech G., Self X-Ray Band Spektra and the Electronic Structure of Metals and Materials / En. D.J. Fabian. - L.:Acad. Press, 1968. - P59.

## ОСОБЛИВОСТІ РЕНТГЕНОФЛУОРЕСЦЕНТНОГО АНАЛІЗУ ФЕРИТІВ У ТОНКИХ ПРОБАХ

*Запропоновано рівняння зв'язку для розрахунку хімічного складу ферита :*

$$c_i = K' \prod_k I_m^{q_m}$$

*де  $I_m$  - інтенсивність флуоресцентного випромінювання  $m$ -ї лінії хімічного елемента, що аналізується;  $c_i$  - концентрація  $i$ -го елемента;  $K'$ ,  $q_m$  - сталі.*

*Методика розрахунку відрізняється від попередніх простотою та універсальністю при потрібній точності аналізу.*

*The following linkage equation for ferrit chemical mixture calculating has been put forward :*

$$c_i = K' \prod_k I_m^{q_m}$$

*in which  $I_m$  - is intensity fluorescence peak of the  $m$  chemical analysis line being analysed;  $c_i$  - concentration of the  $i$ -element;  $K'$ ,  $q_m$  - are constants.*

*Calculating methods differ from the previous ones in simplicity and versatility at the required analysis accuracy.*

У визначенні хімічного складу багатокомпонентних неорганічних матеріалів у даний час найбільш перспективним визнаний рентгеноспектральний флуоресцентний аналіз (РСФА). У сучасному виконанні РСФА ефективний в діапазоні масових концентрацій від ста до сотих долей процентів, причому може проводитись аналіз великого числа (не менше восьми) хімічних елементів одночасно протягом кількох хвилин. Подібні можливості РСФА реалізуються на квантометрах за умови вирішення ряду проблем, а саме: підготовки проби до аналізу, підбору методики розрахунку концентрацій компонентів з необхідною точністю. Згідно з існуючими принципами РСФА, обидві вказані проблеми

взаємопов'язані - для кожного типу проби (насиченої, ненасиченої, розбавленої) створюється конкретна методика розрахунку [1].

У даній роботі запропоновано нову концепцію РСФА, котра дозволяє не враховувати стан проби. Особливу зацікавленість викликає аналіз малих кількостей речовини. У цьому випадку розмір проби може бути менший від об'єму насиченого шару, тобто число рентгенівських квантів може залежати не тільки від складу, але й від товщини проби.

Розглянемо складну оксидну систему, в якій атоми металів розбавлені атомами кисню. При цьому кисень не бере участь у процесі флуоресценції атомами металів, тобто розглядається по відношенню до останніх як "рентгенонейтральне" середовище.

Скористаємося фундаментальним співвідношенням, котре пов'язує масову концентрацію хімічного елемента  $c_i$  у рентгенонейтральному середовищі з числом вторинних рентгенівських фотонів  $N_q$  при електроному переході  $i$ - $q$  в  $q$ -серії [2-4]:

$$N_q = \frac{1}{4\pi} c_i \frac{N_A}{m} \omega_q \rho q \alpha_x \sigma_q(E) \int_0^l \frac{\Phi(x)}{\sin \psi} e^{-\chi x} dx, \quad (1)$$

де  $N_A$  - число Авогадро;  $m$  - атомна маса збудженого атома;  $\omega_q$  - вихід флуоресценції;  $\rho q$  - імовірність переходу атома, збудженого на рівень  $q$  з випромінюванням лінії  $i$ ;  $\sigma_q(E)$  - ефективний переріз  $q$ -рівня для рентгенівського кванта з енергією  $E$ ;  $\chi = \mu_m(\lambda_{qi})/\sin \varphi$ ;  $\mu_m(\lambda_{qi})$  - масовий коефіцієнт ослаблення фотонів з довжиною хвилі характеристичного флуоресцентного випромінювання  $\lambda_{qi}$ ;  $\psi$  - кут між траєкторією первинних і  $\varphi$ -вторинних фотонів та поверхнею зразка;  $\Phi(x)$  - відносна густина збуджених атомів, що залежать від товщини шару  $x$ ;  $l$  - товщина зразка.

У спектрометрах, де застосовується гальмівне випромінювання трубки,  $N_q$  залежить від розподілу довжин хвиль  $\lambda$  первинного випромінювання. Тоді у виразі (1) слід додатково проводити інтегрування за довжинами хвиль в інтервалі від  $\lambda_0 = 12,3959/U_0$  до  $\lambda_{qi}$ , де  $\lambda_0$  - короткохвильова границя гальмівного спектра,  $\text{Å}$ ;  $U_0$  - потенціал іонізації елемента, Кв;  $\lambda_{qi}$  - довжина хвилі  $q$ -краю поглинання атома.

Оскільки функціональний зв'язок з  $\lambda$  для більшості параметрів в (1) ще не отриманий, приймають так зване монохроматичне наближення. В даний час вже створено декілька таких моделей, в яких гальмівний спектр визначають як випромінювання з певною ефективною довжиною хвилі  $\lambda$  [5].

Переходячи до інтенсивностей випромінювань  $I_i = N_q/t$ , де  $t$  - час, і розкриваючи вираз  $\Phi(x)$  [3], з виразу (1) отримуємо:

$$I_i = I_\lambda h c_i \lambda \frac{\tau_{m\lambda}^A / \mu_{m\lambda}}{1 + \frac{\mu_{mi}}{\sin \varphi} \frac{\mu_{mi}}{\mu_{m\lambda}}} \{1 - \exp[-l(\frac{\mu_\lambda}{\sin \varphi} + \frac{\mu_i}{\sin \psi})]\}, \quad (2)$$

де  $\tau$  - коефіцієнт поглинання;  $h$  - стала апарату і форми проби. Індеси біля величини у (2) вказують на: випромінювання первинне ( $\lambda$ ), вторинне ( $i$ ); елемент, що аналізується ( $A$ ); масові коефіцієнти ( $m$ ) і лінійні коефіцієнти (без індекса  $m$ ). Очевидно, що при фіксованому складі ( $c_i = \text{const}$ ) для проб різної товщини існує пропорційна залежність:

$$I_i \sim [1 - \exp(-lh_c)] , \quad (3)$$

де  $h_c$  - коефіцієнт пропорційності. Згідно з [3], максимальна товщина  $l_{\max} = 4,9/\mu_i$ . Із (3) випливає, що при  $l \cong l_{\max}$  інтенсивність наближається до постійного значення.

Проаналізуємо умови зйомки розбавленої проби. При наявності рентгенонейтрального розріджувача, очевидно, його коефіцієнт ослаблення  $\mu^D \ll \mu^A$ . Вважаючи процеси ослаблення окремих атомів незалежними (дійсний закон адитивності відносних коефіцієнтів ослаблення), можемо записати:

$$\mu_{mi} = \mu_{mi}^A c_i + \mu_{mi}^D c_D = \mu_{mi}^A c_i + \mu_{mi}^D (1 - c_i) \approx \mu_{mi}^D + \mu_{mi}^A c_i.$$

Аналогічно:  $\mu_{m\lambda} \approx \mu_{m\lambda}^D + \mu_{m\lambda}^A c_i$ . При великих концентраціях зв'язок між  $I_i$  і  $c_i$  послаблюється, і при  $c_i \gg \mu_m^D / \mu_m^A$  отримаємо:

$$\frac{\mu_{mi}}{\mu_{m\lambda}} \approx \frac{\mu_{mi}^D + \mu_{mi}^A c_i}{\mu_{m\lambda}^D + \mu_{m\lambda}^A c_i} \approx \frac{\mu_{mi}^A}{\mu_{m\lambda}^A}.$$

Тоді при фіксованій товщині маємо:

$$I_i \sim \frac{c_i}{\mu_{m\lambda}} \approx \frac{c_i}{\mu_{m\lambda}^D + \mu_{m\lambda}^A c_i} \approx \frac{1}{\mu_{m\lambda}^A} = \text{const}. \quad (4)$$

Таким чином, в обидвох розглянутих ситуаціях інтенсивність флуоресценції залежить нелінійно від характеристичних параметрів проби - товщини  $l$  (3) і концентрації  $c_i$  (4) навіть у присутності елементів, що заважають, і асимптотично наближається до сталої величини.

При РСФА багатокомпонентних систем необхідно враховувати ефекти вибіркового збудження і поглинання атомами другого сорту. Фундаментальне співвідношення у цьому випадку повинно відображати загальну закономірність фізичного процесу. Його використання для визначення концентрацій нашттовується на ряд серйозних складностей. По-перше, врахування всіх ефектів призводить до громіздких обчислень, які потребують застосування потужних ЕОМ [4]. Але, що більш важливо, застосування існуючих наближень для параметрів фундаментального співвідношення призводить до набору помилок. Їх врахування потребує обчислення функціоналу помилок з допомогою різних математичних моделей, наприклад, інтерполяції за великим числом вузлів.

Таким чином, виникає друга проблема - розв'язок некоректно сформульованої задачі. Наведені докази переконують у необхідності використання альтернативних методик, таких як апроксимації регресійними моделями, що не враховують фізичних закономірностей, чи так звані динамічні рівняння зв'язку, в яких опосередкованим методом витримані взаємозв'язки параметрів процесів. При співставленні рівнянь типу  $I=f(c)$  керуються пошуком компромісу між необхідною точністю і відносною простотою обчислень.

Зараз перевага надається динамічним рівнянням зв'язку. У програмних забезпеченнях закордонних приладів найчастіше використовується рівняння Клайссе - Квінтіна [6]:

$$c_i = (I_i / I_i^{100})(1 + \sum \alpha_{ij} c_j + \sum \sum \alpha_{ijk} c_j c_k), \quad (5)$$

де  $I_i^{100}$  - інтенсивність  $i$ -ї лінії при  $c_i = 100\%$ . Тут проводиться підсумовування за концентраціями інших елементів ( $j, k \neq i$ ) і за їх парними добутками, помноженими на емпіричні коефіцієнти  $\alpha_{ij}$  та  $\alpha_{ijk}$ . Рівняння (5) є типовим для РСФА. З метою врахування відхилення від адитивності в даних рівняннях застосовують спо-

сіб альфа-корекції, в якому залежність емпіричних коефіцієнтів від хімічного складу апроксимується лінійною або обернено лінійною функцією [4, 7]. Загальне число еталонів при цьому із двох-трьох для кожного елемента зростає в декілька разів.

Подібні ускладнення виду рівнянь зв'язку потрібні для зміни характеру нелінійної залежності  $I=f(c)$  з однією метою - підвищення точності вимірювань концентрацій.

Однак закономірності (3) і (4) дозволяють по-новому підійти до розв'язання поставленої задачі. Пропонується представляти рівняння зв'язку у вигляді дробово-степеневі функції. Для однокомпонентної розбавленої системи рівняння виглядатиме так:

$$I_i = K_i c_i^{n_i} \quad (6)$$

Дане співвідношення задовольняє умову (4): у насиченому шарі при  $c_i$ , що прямує до 1,  $I_i$  прямує до сталої величини  $K_i$ . Для тонких зразків систему "проба-підкладка" можна розглядати як додатково розбавлену. Запишемо цю умову у математичній формі. Позначимо індексом "о" інтенсивність і концентрацію у насиченому шарі:  $I_{i0}, c_{i0}$ . Тоді  $I_{i0} = K_i c_{i0}^{n_i} = I_i (c_{i0} / c_i)^{n_i}$ , звідки  $I_i = I_{i0} (c_i / c_{i0})^{n_i} = I_{i0} (I / I_{\max})^{n_i}$ . Ввівши нову величину - відносну концентрацію у ненасиченому шарі  $c_{ir} = c_i / c_{i0}$ , отримаємо:

$$I_i = I_{i0} c_{ir}^{n_i} \quad (7)$$

Рівняння (7) задовольняє обидві умови (3) і (4). Воно просто зв'язує інтенсивність флуоресценції із концентрацією елемента в системі незалежно від того, чи концентрація змінюється за рахунок степені розбавлення, чи за рахунок товщини проби.

При переході до багатокомпонентних матеріалів, таких як ферити, при відсутності елементів, що заважають, інтенсивності від кожного елемента виражаються рівняннями (6) або (7):

$$I_i = c_i^{n_i} K_i, \dots, I_j = c_j^{n_j} K_j, \dots, I_k = c_k^{n_k} K_k, \dots$$

Більшість феритів складається з трьох основних компонентів. Відношення концентрацій трьох елементів в них можна представити:

$$I_i = \left( \frac{c_i}{c_j} \right)^{n_i} \cdot \frac{1}{c_k} = K'_{ijk} \frac{I_i^{n_i / n_i}}{I_j^{n_j / n_k} I_k^{n_k / n_k}}$$

У випадку взаємного впливу елементів показники степеня  $n_i$ ,  $n_j$ ,  $n_k$  зміняться і відношення концентрацій двох елементів буде:

$$\frac{c_i}{c_j} = K \frac{I_i^{p_i}}{I_j^{p_j} I_k^{p_k}} \quad (8)$$

З рівняння (8) можна вивести узагальнене рівняння зв'язку для одного  $i$ -го з  $k$  елементів:

$$c_i = K \prod_k I_m^{q_m} \quad (9)$$

де концентрація  $i$ -го елемента  $c_i$  пропорційна добутку інтенсивностей  $I_m$ , піднесених до степеня  $q_m$ , від  $k$  випромінюючих атомів.

Згідно з рівнянням (9), врахування впливу заважаючих елементів в запропонованій методиці відбувається на основі ефекту мультиплікативності. Доцільність такого підходу зумовлена тим, що, як було показано вище, в методиках, які застосовувались до цього часу, користувачі РСФА вносили поправки на відхилення від ефекту адитивності. Необхідність такої корекції проілюструємо наступним прикладом. Імовірність  $p_q$  в (1) дорівнює сумі імовірностей флуоресценції від первинного пучка і від атомів інших випромінювачів у відповідності з ефектом адитивності. В той же час імовірності вибіркового збудження атомів  $j$  та імовірності випромінювання ним квантів, здатних збудити аналізований атом  $i$ , що і є проявом ефекту мультиплікативності.

Використання рівняння зв'язку виду (8) не вимагає визначення інтенсивності первинного пучка і товщини проби. В тонких, так само як і в насичених пробах, для відношення концентрацій виконується тотожність:

$$c_i / c_j = c_{i0} / c_{j0}$$

звідки отримуємо  $c_{iR} / c_{jR} = 1$ . Отже функцію  $c_i / c_j = f(I_m)$  можна вважати інваріантною відносно типу проби. Значення абсолют-

них концентрацій знаходять з умов нормування:  $\sum_{n=1}^m c_n = const$ .

Для феритів в перерахунку на оксиди умова нормування має вигляд:

$$\sum_{n=1}^m c_{ок_n} = 1,$$

де  $c_{ок_n}$  - масова концентрація  $n$ -го оксиду.

Показники степеня і коефіцієнт пропорційності в рівнянні (8) визначаються регресійним методом після логарифмування. Неважко помітити, що для логарифмів концентрацій та інтенсивностей закон адитивності виконується (з врахуванням показників степеня).

На практиці при використанні даної методики (так само як інших методик) необхідно враховувати специфічні особливості РСФА: ефекти вибіркового збудження і поглинання, вплив якості поверхні і мікроабсорбційної неоднорідності та ін. З цією метою проводились контрольні вимірювання. Об'єктами досліджень служили марганець-цинкові ферити різного хімічного складу, одержані за керамічною технологією. Проби для РСФА виготовлялися різної товщини. Режим вимірювання залишався незмінним, тому про товщину проб можна судити за абсолютними інтенсивностями флуоресценції (таблиця). При різній товщині проб і різному хімічному складі феритів показники степеня і коефіцієнти в рівнянні (8) для певної пари металів вважалися сталими і визначалися регресійним методом з використанням даних хімічного аналізу (концентрація малої добавки оксиду кобальта розрахована відносно базового складу фериту, тобто понад 100%).

Результати РСФА MnZn - феритів.

Партія	Проба	Інтенсивність, $\times 100$ імп/с				Концентрація, мас. %			
		$I_{Mn}$	$I_{Fe}$	$I_{Zn}$	$I_{Co}$	$C_{MnO}$	$C_{ZnO}$	$C_{Fe_2O_3}$	$C_{CoO}$
Ш	1	77,4	330	21,0	1,139	18,6	10,2	71,3	0,156
	2	62,0	264	17,6	1,027	18,6	10,1	71,3	0,156
	3	53,8	231	15,8	0,933	18,6	10,1	71,3	0,156
	4	42,0	175	12,8	0,755	18,9	10,1	71,0	0,155
		Хімічний аналіз				18,6	10,2	71,2	0,152
2Н	5	91,8	395	29,2	1,820	17,6	11,7	70,7	0,188
	7	40,4	179	15,6	1,133	17,7	11,6	70,7	0,186
	8	91,8	389	28,6	1,740	17,8	11,6	70,6	0,185
		Хімічний аналіз				17,6	11,6	70,8	0,191

Як випливає з таблиці, метод РСФА досить чутливий до малих змін концентрацій елементів, що аналізуються. Ширина смуги невизначеності при зміні товщини проби для оксиду заліза становить 0.15%.

Численні виміри за даною методикою показали, що при варіюванні концентрацій в більш широких межах (у два рази і більше) похибка РСФА в тонких пробах не перевищувала гранично допустимої для хімічних методів аналізу, які вважаються на даний час найбільш точними.

1. Лосев Н.Ф., Смагунова А.Н. Основы рентгеноспектрального флуоресцентного анализа. - М.: Химия, 1982. - 208 с.
2. Блохин М.А. Физика рентгеновских лучей. - М: ГИТТЛ, 1957. - 518 с.
3. Майзель А., Леонхард Г., Сарган Р. Рентгеновские спектры и химическая связь. К.: Наук. думка, 1981. - 420 с.
4. Верховодов П.А. Рентгеноспектральный анализ. Раздельный учет физических процессов. - К.: Наук. думка, 1992. - 420 с.
5. Лямина О.И., Куприянова Т.А. Способ рентгеноспектрального флуоресцентного анализа лазерных структур GaAs-Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As// Завод. лаб. - 1994. - №6. - С.16-19.
6. Афонин В.П. Рентгенофлуоресцентный анализ в геологических исследованиях // Завод. лаб. - 1992. - №1. - С.25-33.
7. Лаврентьев Ю.Г., Кузнецова А.И. Уравнения связи в рентгенофлуоресцентном анализе //Завод. лаб. - 1979. - №4. - С.315-326.

## ВПЛИВ ІОНІВ ІНДІЮ І СКАНДІЮ НА ФІЗИКО-ХІМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МАРГАНЦЕВО-ЦИНКОВИХ ФЕРИТІВ

*Введення іонів  $In^{3+}$  та  $Se^{3+}$  у матрицю марганцево-цинкового фериту із загальною формулою  $Mn_{0.6}Zn_{0.4}Fe_{2-x}Me_xO_4$ , де  $Me$  - іони  $In^{3+}$  або  $Se^{3+}$  при рівних значеннях  $x$  впливають на фізико-хімічні властивості цього фериту.*

*Залежно від вмісту іонів  $In^{3+}$  чи  $Se^{3+}$  по-рівному змінюється стала ґратки, температура Кюрі та питома намагніченість насичення, що дає можливість завбачити та керувати процесами при виготовленні зразків в наперед заданими параметрами.*

*The influence of indium and scandium upon the physico-chemical characteristics of manganese-zinc ferrite.*

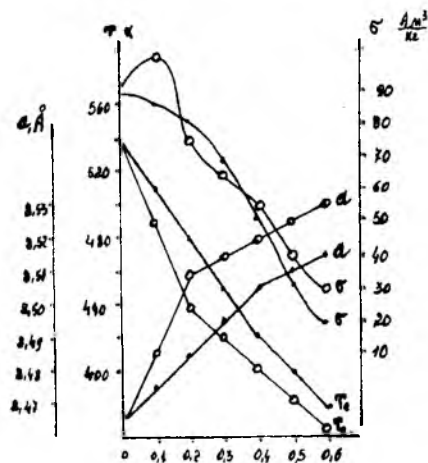
*The introducing of ions of  $In^{3+}$  and  $Se^{3+}$  into the mould of manganese-zinc ferrite the general formula of which is  $Mn_{0.6}Zn_{0.4}Fe_{2-x}Me_xO_4$  where  $Me$  means the ions of  $In^{3+}$  or  $Se^{3+}$  with different figures of  $x$ , influence the physico-chemical characteristics of this ferrite.*

*The constant grate, the temperature by Kyury and specific magnetizing of saturation change, depending on the quantity of ions  $In^{3+}$  or  $Se^{3+}$  what gives the opportunity foreknow and direct the processes of making the samples with parameters set in advance.*

Серед магнітом'яких матеріалів, що виготовляються у промисловості, особливе місце займають марганцево-цинкові ферити. В даній роботі вивчався вплив іонів індію і скандію на магнітні та кристалографічні властивості вищезгаданих феритів, загальна формула яких  $Mn_{0.6}Zn_{0.4}Fe_{2-x}Me_xO_4$ , де  $Me$  - іони  $Zn^{3+}$  або  $Sc^{3+}$ , значення  $x = 0,00; 0,05; \dots; 0,6$ . Вони виготовлялись методом керамічної технології [1]. Матеріалом для шихти були окисли  $Fe_2O_3$ ,  $Zn_2O_3$ ,  $Sc_2O_3$ ,  $ZnO$ , вуглекислий марганець  $MnCO_3$  марки

ЧДА. Попередня феритизація шихти відбувалась при температурі 1523К протягом чотирьох годин. Феритові зразки спікались по III вакуумній програмі [2,3] при температурі 1523К протягом п'яти годин. Швидкість нагрівання - 160 градусів за годину.

Рентгенофазовий аналіз показав, що марганцево-цинкові ферити, леговані іонами індію при  $0 < x < 0,20$ , є однофазні, а при  $x > 0,20$  - двофазні тверді розчини. Ця ж система, легована іонами  $Sc^{3+}$  при  $0 < x < 0,4$ , є однофазним, а при  $x > 0,4$  - двофазним твердим розчином. Іонний радіус  $In^{3+}/r = 0,92 \text{ \AA}$ / більший, ніж у  $Sc^{3+}/r = 0,83 \text{ \AA}$  [4,5], отже в матрицю марганцево-цинкового фериту можна ввести іонів  $Sc^{3+}$  більше, ніж іонів  $In^{3+}$ . Зміна сталої кристалічної ґратки марганцево-цинкового фериту з вмістом індію і скандію лінійно корелює із зміною температури Кюрі (мал.). Швидкість зростання сталої кристалічної ґратки марганцево-цинкового фериту з добавками  $In^{3+}$  при  $x > 0,2$  і  $Sc^{3+}$  при  $x < 0,4$  значно менша, ніж відповідно при  $x < 0,2$  для  $In^{3+}$  і  $x < 0,4$  для  $Sc^{3+}$ , що теж пояснюється наявністю другої фази. Це підтвердили також і мессбаурівські спектри  $Fe^{57}$  досліджуваних систем.



Мал.1. Зміна сталої ґратки (а), температури Кюрі ( $T_c$ ) і питомої намагніченості насичення (б) системи  $Mn_{0,6}Zn_{0,14}Fe_{2-y}Me_xO_4$  в залежності від вмісту іонів  $Zn^{3+}$  (о) і  $Sc^{3+}$  (•).

Для марганцево-цинкового фериту, легованого  $In^{3+}$  в межах  $x \leq 0,1$ , питома намагніченість насичення монотонно зростає, а при  $x > 0,1$  - зменшується. Це пояснюється тим, що немагнітні іони  $In^{3+}$ , займаючи тетраедричні позиції [4,5], зменшують магнітний момент даної підґратки, і тим самим сприяють збільшенню результуючого магнітного моменту:  $\sigma = \sigma_{окт}$ . Лінійне зменшення питомої намагніченості насичення марганцево-цинкового фериту, легованого скандієм, зумовлено тим, що іони  $Sc^{3+}$  мають тенденцію займати октаедричні позиції [4,5].

Введення іонів індію і скандію в матрицю марганцево-цинкового фериту по-різному впливають на фізичні властивості даного фериту: однофазний твердий розчин буде при  $0 < x \leq 0,2$  для іонів індію і  $0 < x \leq 0,4$  для іонів скандію. Введення іонів  $In^{3+}$  в межах  $0 < x < 0,1$  дозволяє збільшувати питому намагніченість насичення. Отже, введення іонів індію і скандію в матрицю марганцево-цинкового фериту дає змогу керувати фізичними властивостями цих феритів.

1. Рабкин Л.І., Соскин С.А., Эпштейн Б.Ш. Ферриты. - Л.: Энергия, 1968. - 384 с.
2. Третьяков Ю.Д. Термодинамика ферритов. - М. - Л.: Химия, 1967. - 304 с.
3. Шольц Н.Н., Пискарёв К.А. Ферриты для радиочастот. - М.-Л.: Энергия, 1966. - 258 с.
4. Селвуд П. Магнетохимия. - М.: Госиздат, 1958. - 378 с.
5. Смит Я., Вейн Х. Ферриты. - Л.-М., 1962. - 504 с.

**В.Д.Федорів, В.Д.Костишин, Т.П.Владімірова**

### **ВПЛИВ РЕЖИМІВ ЕПІТАКСІЇ ФЕРИТ-ГРАНАТОВИХ ПЛІВОК НА ЇХ МАГНІТНІ І ОПТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

*Досліджено вплив швидкості росту епітаксійних ФГП складу  $(YSmLuCa)_3(FeGe)_5O_{12}$  на їх структурні, магнітні і оптичні характеристики. Встановлено функціональну залежність поля колапса, поля анізотропії, температури Нееля і величини намагніченості від швидкості росту. Показано, що з отриманих епітаксійних структур придатними для зародження ЦМД є ФГП, отримані при швидкості росту 0,56-0,92 мкм/хв.*

*The influence of speed growth of epitaxial FGF of  $(YSmLuCa)_3(FeGe)_5O_{12}$  is examined on their structural, magnetic and optical characteristics. The functional dependence of collapse field, anisotropy field, Neel temperature and magnetic size of speed development is determined. It is proved that from the received epitaxial structures suitable for us conceiving of CMD are FGF which were received during speed development 0,56-0,92 mkm/min.*

В технології циліндричних магнітних доменів (ЦМД) найцікавішими є ферит-гранатові плівки (ФГП) складу  $(YSmLuCa)_3(FeGe)_5O_{12}$  з площиною зрізу  $\langle 111 \rangle$ , які володіють великою ефективністю зміни намагніченості порівняно з Ga-заміщеними ФГП. З іншого боку, комбінуючи величину Ga-Ge заміщення, можна домогтися необхідних магнітних параметрів ФГП. Входження гранатоутворюючих елементів із розчину-розплаву в епітаксійну ФГП значною мірою залежить від умов росту.

У даній роботі досліджено вплив швидкості росту епітаксійних ФГП складу  $(YSmLuCa)_3(FeGe)_5O_{12}$  на їх структурні, магнітні і оптичні характеристики.

Епітаксійні плівки вирощені із одного розчину-розплаву на гадоліній-галієвій підкладці з кристалографічною площиною зрізу

$\langle 111 \rangle$  і постійною ґратки  $a = 12,3818 \pm 0,0005 \text{ \AA}$ . Для дослідження отриманих ФГП використовувались магнітооптичні і оптичні методи, а також методи месбаурівської конверсійної спектроскопії і рентгеноструктурного аналізу.

Аналіз месбаурівських спектрів показав, що всі епітаксійні ФГП, отримані при різних швидкостях росту, характеризуються одноосною ростовою анізотропією, на що вказує присутність другої і п'ятої ліній в секстетях, які відповідають нееквівалентним положенням заліза в а- і d-підґратках граната.

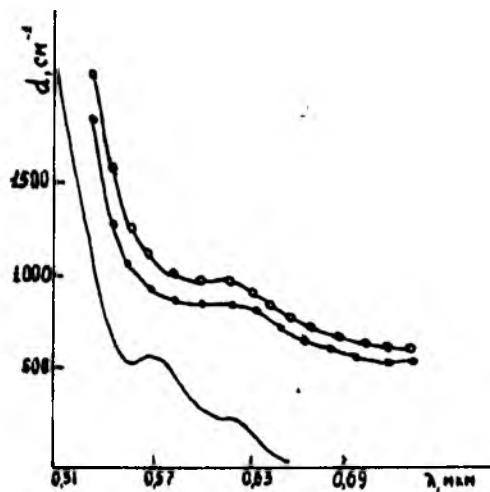
Умови росту і параметри отриманих плівок наведені в таблиці, з аналізу якої випливає, що із збільшенням швидкості епітаксії суттєво змінюються магнітні властивості плівок, а також магнітостатичні характеристики їх доменної структури: відбувається зменшення поля колапса і поля еліптичної нестійкості, збільшується величина поля анізотропії, зменшується значення температури Нееля. Така зміна вказаних параметрів зумовлена тим, що із збільшенням температури переохолодження розчину-розплаву, а отже і швидкості епітаксії, відбувається зміна коефіцієнта входження гранатоутворюючих елементів. Зменшення температури Нееля пов'язано із ростом коефіцієнта входження Ge, який прямує до одиниці при зростанні степеня переохолодження розчину-розплаву[1]. В результаті заміщення іонів Ge іонами Fe відбувається зменшення величини обмінної взаємодії (табл.), а отже і величини намагніченості. Таким чином, змінюючи швидкість росту, ми можемо керувати магнітними властивостями ФГП при незмінній концентрації гранатоутворюючих елементів в розчині-розплаві. Аналіз значень характеристичної довжини вказує на те, що із отриманих епітаксійних структур найпридатнішими для зародження ЦМД є ФГП, отримані при швидкостях росту 0,56-0,92 мкм/хв.

Важливе значення в технології ЦМД-матеріалів на основі епітаксійних ФГП мають оптичні властивості, які, в основному, визначаються коефіцієнтом заломлення, товщиною плівки і спек-

тром пропускання. Для визначення вказаних характеристик на спектрометрі СФ-26 отримані спектри пропускання ФГП, отриманих при різних швидкостях росту. Точність вимірювання коефіцієнта пропускання становила 4-6%. На мал.1 показано типовий спектр пропускання ФГП. Оскільки в області довгих хвиль структура граната досить прозора і дисперсія мала [2], то наявні флуктуації інтенсивності пов'язані з інтерференцією променів, відбитих від межі розділу повітря-плівка і плівка-підкладка. Максимуми кривої пропускання, в залежності від хвильових чисел, знаходяться на однаковій відстані один від одного ( $\nu_1 - \nu_2 = \nu_2 - \nu_3 = \dots$ ), товщину ФГП можна знайти [3] за формулою:

$$h = \frac{1}{2(\nu_1 - \nu_2)n_{пл}} \quad (1)$$

де  $n_{пл}$  - показник заломлення.



Мал.1.

Для визначення показника заломлення з інтерференційної картини [4] використовувалась формула:

$$n_{пл} = 0,5(n_{пл} + n_{пд})\sqrt{c} + \sqrt{[(n_{пл} + n_{пд})\sqrt{c}]^2 - 4n_{пл} - n_{пд}} \quad (2)$$

де для зручності  $c$  замінює вираз:

$$c = \frac{T_{max} + [(n_{пд} - n_{пл}) / (n_{пд} + n_{пл})]^2 - [(1 - T_{max})[(n_{пд} - n_{пл}) / (n_{пд} + n_{пл})]]^2}{T_{min} + [(n_{пд} - n_{пл}) / (n_{пд} + n_{пл})]^2 - [(1 - T_{max})[(n_{пд} - n_{пл}) / (n_{пд} + n_{пл})]]^2} \quad (3)$$

У формулі (3)  $n_{пл}$  - показник заломлення повітря, який з точністю до 0,02 можна рахувати рівним 1;

$n_{пд} = 1,9726$  - показник заломлення підкладки ГГГ [5];

$T_{max}$  і  $T_{min}$  - значення інтенсивності пропускання в сусідньому максимумі і мінімумі.

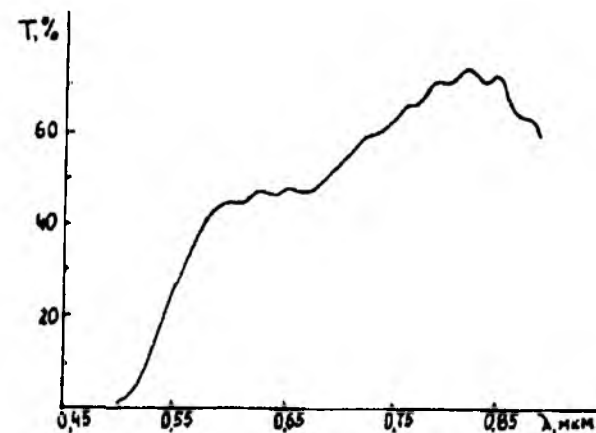
Зв'язок коефіцієнта поглинання  $\alpha$  досліджуваних плівок [6] задається формулою:

$$T = \frac{(1 - R^2) e^{-2\alpha h}}{1 - R^2 e^{-2\alpha h}} \quad (4)$$

де

$$R = \frac{(n_{пл} - 1)^2}{(n_{пл} + 1)^2} \quad (5)$$

Визначивши товщину плівки і показник заломлення за допомогою формул (1) і (2), знаходимо спектральну залежність коефіцієнта поглинання для ФГП, вирощених з різними швидкостями (мал.2).



Мал.2.

На мал.2 представлені спектри поглинання тільки для двох зразків, які вирощені при  $\omega = 0,56$  і  $\omega = 1,2$  мкм/хв, тобто для двох



крайніх швидкостей росту, оскільки збільшення коефіцієнта поглинання пропорційне швидкості росту.

Спектр поглинання феромагнітних гранатів у видимій і ближній інфрачервоній області спектра в основному визначається переходами, які пов'язані з октаедрично оточеними іонами заліза  $Fe_{окт}$ :  ${}^6A_{1q} - {}^4T_{1q} (\lambda = 0,6 \text{ мкм})$ ,  ${}^6A_{1q} - {}^4T_{2q} (\lambda = 0,7 \text{ мкм})$  і переходами, які відповідають тетраедрично оточеним іонам заліза  $Fe_{тетр}$ :  ${}^6A_1 - {}^4T_1 (\lambda = 0,6 \text{ мкм})$ ,  ${}^6A_1 - {}^4T_2 (\lambda = 0,52 \text{ мкм})$  [6]. В спектрах поглинання досліджуваних плівок переходи  ${}^4T_1$  і  ${}^4T_{2q}$  складають одну розмиту смугу в області 0,6-0,7 мкм, а перехід  ${}^4T_2$  маскується сильним поглинанням, викликаним переходами, пов'язаними з переносом заряду між  $Fe^{3+}$  і кисневими лігандами.

Оскільки ФГП вирощувались із флюсу  $PbO-V_2O_5$ , то крім переходів, пов'язаних з іонами  $Fe^{3+}$ , на кривих поглинання плівок повинен бути пік, зумовлений переходом  $Pb^{4+} + Pb^{2+} \leftrightarrow Pb^{3+} + Pb^{3+}$  при  $\lambda = 0,5555 \text{ мкм}$ . Відсутність чітко вираженого піка можна пояснити іншим механізмом компенсації іонів  $Pb^{4+}$  (наприклад, за рахунок вакансій) [7]. Згладження спектра поглинання пов'язано з наявністю у ФГП домішок свинцю. Особливо відчутний вплив свинцю є в області довгих хвиль, де значення коефіцієнта поглинання чистого  $Y_3Fe_5O_{12}$  є досить малим.

Показники заломлення в ФГП, які вирощені при невеликих швидкостях росту, мають значення близькі до тих, які необхідні для задовільної роботи приладів ( $\sim 2,2$ ). Збільшення швидкості росту ФГП приводить до зростання показника заломлення (табл.) і при швидкості росту 1,2 мкм/хв складає  $\sim 2,46$ . Таке збільшення показника заломлення відповідає вмісту свинцю порядку 1-3 ваг.%, який сконцентрований, в основному, в перехідному шарі плівка-підкладка, оскільки на початковій стадії епітаксії швидкість її росту досить велика.

Таким чином, оптичне поглинання у видимій і інфрачервоній області спектру більше в епітаксійних ФГП, які вирощувались при достатньо високих значеннях швидкості росту.

1. Элементы и устройства на цилиндрических магнитных доменах/Под ред. Евтихиева Н.Н., Наумова Б.М.: М.: Радио и связь, 1987. - 488 с.
2. Ryssel H., Lorenz J., Hoffman K. Models for implantation into multilayer targets // Appl.Phys.(A). - 1986. - v.41, №3. - p.201-207.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики, - М.: Наука, 1970. - 719 с.
4. Черемухин Г.С., Кириенко Б.В., Гурдин Е.Н. Расчет оптических характеристик пленок//Оптико-механическая промышленность. - 1976. - №6. - С.13-15.
5. Показатели преломления редкоземельных галлиевых гранатов / Балабанова С.А., Жариков Е.В., Лаптев В.В., Шигорин В.Д. // Кристаллография. - 1984. - вып.6. - с.1201-1202.
6. Optical absorption and Faraday rotation in yttrium iron garnet/ Witting W., Audlaner B., Koide P. e.a.// Phys.State Sol.(B). - 1973. - v.59. - p.674-680.
7. Absorption spectra and magneto-optic figures of merit in the  $Bi_xSm_{3-x}Fe_{5-y}Ca_yO_{12}$  system/ Scott G.B., Lakkison D.E., Hage J.L., Hewitt J.// Appl.Phys. - 1976. - v.9. - p.71-77.

І.М.Гасюк, О.В.Копаяв

## РОЗПОДІЛ ХІМІЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ПОВЕРХНЕВИХ ШАРАХ МАГНІТОМ'ЯКИХ ФЕРИТІВ

*Застосовуючи розроблену методику рентгенофлуоресцентного аналізу у тонких пробах, проведено дослідження хімічного складу поверхневих шарів марганець-цинкових феритів. Показано, що при спіканні феритів в атмосфері з малими добавками кисню концентрація цинку у пограничній з поверхнею шарі є меншою, ніж в об'ємі. На глибині до 200 мкм від поверхні концентрація цинку вища, ніж у об'ємі при рівній атмосфері спікання.*

*Розподіл хімічних елементів за шарами визначається напрямком та швидкістю дифузії катіонів у твердому тілі.*

*With the help of X-ray fluorescence analysis in thin samples chemical mixture of surface layers analysis has been carried out. It is shown that in the process of ferrites sintering in the atmosphere of oxygen pressure zinc concentration in the layer, bordering on the surface, is less than it is in volume. Zinc concentration while being checked at a depth up to 200 mkm from the surface, is higher then in volume at different sintering atmosphere.*

*Chemical elements distribution in the layers is defined by cations diffusion direction and speed in solid.*

Більшість полікристалічних феритових матеріалів отримується шляхом спікання спеціально підготовленої шихти із відповідних окислів металів при відносно високих температурах. Це вимагає врахування впливу газового середовища, в якому проходить спікання, оскільки при високих температурах на межі газової і твердої фаз будуть протікати дифузійні процеси, які сформуєть неоднорідний за хімічним складом і електромагнітними властивостями приповерхневий шар готового фериту. У літературі є ряд робіт [1-3], в яких показано, що в залежності від складу, парціальних тисків газового середовища приповерхневий

шар фериту за своїми фізичними властивостями суттєво відрізняється від об'єму.

Мета нашої роботи — дослідження розподілу хімічних елементів у приповерхневих шарах Mn-Zn феритів методом рентгенофлуоресцентного аналізу в тонких пробах і оцінка коефіцієнтів дифузії. У порівнянні з локальним мікрорентгено-спектральним аналізом, рентгенофлуоресцентний метод дає інтегральну концентрацію елементів у пробі, що зменшує локальність по глибині, але дозволяє уникнути трудомісткої статистичної обробки експериментальних результатів і підвищити точність вимірювань.

Досліджувались промислові марганець-цинкові ферити, отримані із шихти такого складу:  $Fe_2O_3$  — 70.65 %; MnO — 17.62 %; ZnO — 11.53 %; CoO — 0.20 % мас. %. Спресовані зразки у вигляді таблеток товщиною 5 мм спікались в атмосфері повітря при температурі  $0.8 T_{пл}$  і охолоджувались за вакуумною програмою. Температурно-газовий режим для зразка 1 був стандартний [1], для 2 — модернізований. З поверхні спечених зразків за допомогою алмазного круга зішліфовувались чотири шари товщиною 50 мкм кожний, з яких готувались тонкі проби для рентгеноспектрального флуоресцентного аналізу на багатоканальному спектрометрі СРМ-20. Для отримання первинного гальмінового спектра використовувалась рентгенівська трубка з палладієвим опором (робоча напруга - 20 кВ, струм - 30 мА). З метою визначення концентрації хімічних елементів у пробах вимірювалась інтенсивність вторинного характеристичного випромінювання, а саме  $K_{\alpha_{1,2}}$  Mn, Fe і Zn. Підкладкою проби служила таблетка із дигідрофторофосфату амонію ( $NH_4H_2PO_4$ ). Відносне відхилення інтенсивностей ліній від однієї проби не перевищувало 0.08% для марганцю, 0.15% для заліза і 0.45% для цинку. Час експозиції — 100 с. Для порівняння було приготовлено також пробу із порошку, отриманого аналогічним

способом з об'єму зразка 1. З метою калібровки використовувались еталонні феритові порошки, склад яких був визначений хімічним методом. Визначення концентрації металів у пробі проводилось за спеціально розроблену методикою [4]. Рівняння взаємозв'язку інтегральних інтенсивностей  $K_{\alpha_{1,2}}$  ліній відповідних елементів та їх концентрації у досліджуваних пробах мають такий вигляд:

$$a_{ZM} = \frac{C_{Zn}}{C_{Mn}} = \left( \frac{I_{Zn}}{1.3165 I_{Mn}^{0.770}} \right)^{0.982};$$

$$a_{MF} = \frac{C_{Mn}}{C_{Fe}} = \frac{I_{Mn}}{1.3165 I_{Fe}^{1.043}};$$

$$a_{ZF} = \frac{C_{Zn}}{C_{Fe}} = \left( \frac{I_{Zn}}{1.3165 I_{Fe}^{0.782}} \right)^{0.8006};$$

де  $C_{Fe}, C_{Mn}, C_{Zn}$  — концентрація заліза, марганцю і цинку відповідно (мас. %);  $I_{Fe}, I_{Mn}, I_{Zn}$  — інтегральна інтенсивність Fe  $K_{\alpha_{1,2}}$

Mn  $K_{\alpha_{1,2}}$  і Zn  $K_{\alpha_{1,2}}$  відповідно ( $\frac{iMP}{c}$ ). Отримані результати приведені в таблиці.

Таблиця 1.

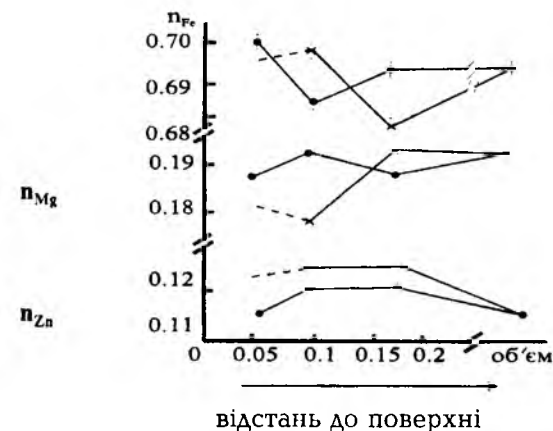
Значення  $a$  і масові концентрації оксидів металів у відповідних приповерхневих шарах і об'ємі досліджуваних зразків

№ зразка	Положення шару по глибині	$a_{ZM}$	$a_{MF}$	$a_{ZF}$	концентрація оксиду, мас. %		
					Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	MnO	ZnO
1	0-50	0.70	0.264	0.189	71.3	17.3	11.6
	50-100	0.72	0.277	0.201	70.2	17.6	12.2
	150-200	0.74	0.266	0.200	70.7	17.1	12.2
2	50-100	0.81	0.252	0.208	71.1	16.2	12.7

1	150-200	0.76	0.281	0.211	69.5	17.7	12.8
	Об'єм	0.68	0.275	0.188	70.8	17.6	11.6
Похибка					±0.2	±0.1	±0.1

Відносна похибка вимірювань оцінювалась за величиною  $(a_{ZM} \cdot a_{MF}) \cdot 100\%$  і не перевищувала 2.1 %. Вона менша за похибку, яка допускається у хімічному аналізі, а також відповідає нормам рентгеноспектрального флуоресцентного аналізу [5]. Необхідно зауважити, що у нашому випадку кількість феритового порошка, отриманого із відповідного шару для проведення кількісного хімічного аналізу, була б недостатньою.

Залежність долі катіонів  $n_{Me}$  від глибини у досліджуваних феритах зображена на малюнку.

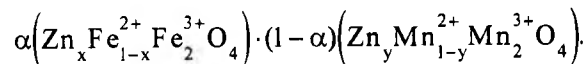


Мал.1. Розподіл іонів заліза, марганцю і цинку по глибині у марганець-цинковому фериті: 1 (•); 2 (x)

Із отриманих результатів видно, що розподіл катіонів по шарах у марганець-цинкових феритах в обох випадках характеризується значною неоднорідністю, що можна пояснити існуванням дифузійних потоків при спіканні і охолодженні, які приводять систему "ферит-середовище" у стан термодинамічної рівноваги.

Внаслідок значної пружності парів цинку і кисню над поверхнею фериту, цинк переходить у газове середовище, що викликає, як видно з малюнку, зменшення його концентрації у поверхневому шарі в порівнянні з об'ємом. У той же час на глибині 50-200 мкм концентрація цинку більша, ніж в об'ємі. У цій же області, згідно з мас-спектроскопічним дослідженням [2], виявлено аномальне збільшення концентрації кисню, що пояснюється нерівноважними умовами охолодження фериту. Враховуючи, що марганець-цинкові ферити є складними шпінельними структурами, до складу яких входять такі катіони зі змінною валентністю як залізо і марганець, логічно припустити, що у даному випадку їх валентність повинна зростати.

Уявимо ферити у вигляді твердого розчину



Доля катіонів цинку запишеться у вигляді:  $n_{\text{Zn}} = [\alpha x + (1-\alpha)y]/3$ .

Таким чином, при фіксованому  $\alpha$  концентрація іонів цинку росте із зменшенням концентрації двовалентних іонів інших металів. В об'ємі зразка, тобто на глибині більше 200 мкм, іони заліза чи марганцю знаходяться у відновленому стані, що призводить до зменшення іонної долі цинку (див. мал.1).

У зразку 2 концентрація цинку у поверхневому шарі 0-50 мкм вища, ніж у зразку 1, що пояснюється умовами експерименту. В іншому випадку були забезпечені умови, при яких парціальний тиск цинку в газовому середовищі при спіканні фериту був значно вищим, що зумовило його входження у структуру шпінелі із газового середовища.

Привертає увагу розподіл катіонів у перехідному шарі на глибині 50-200 мкм. В обох зразках концентрації іонів заліза і марганцю зазнають різних змін, що, очевидно, зумовлено протіканням інтенсивних процесів протидифузії цих катіонів.

Отримані результати дозволяють провести оцінку коефіцієнтів дифузії у досліджуваних процесах. Припустивши, що аніонна

підгратка нерухома, коефіцієнт протидифузії буде пропорційний такому відношенню [6]:

$$\bar{D} \sim \frac{6D_{\text{Mn}}^* \cdot D_{\text{Fe}}^*}{2n_{\text{Mn}} D_{\text{Mn}}^* + 3n_{\text{Fe}} D_{\text{Fe}}^*},$$

де  $D_{\text{Mn}}^*, D_{\text{Fe}}^*$  — коефіцієнти самодифузії іонів марганцю і заліза відповідно.

Вважаючи, що для стаціонарного дифузійного потоку  $\bar{D} = \text{const}$ , отримаємо:

$$2n_{\text{Mn}} D_{\text{Mn}}^* + 3n_{\text{Fe}} D_{\text{Fe}}^* = \text{const}.$$

Використання експериментальних результатів, отриманих в даній роботі, дозволило вирахувати відношення коефіцієнтів самодифузії  $D_{\text{Mn}}^*/D_{\text{Fe}}^*$ . Для зразків 1 і 2 воно рівне 1.4 і 1.5 відповідно. Згідно з [7] коефіцієнти дифузії іонів марганцю і заліза в марганець-цинковому фериті, які були визначені методом радіоактивних ізотопів, приблизно рівні між собою, тоді як у роботі [6] їх відношення, знайдене при дифузії через границю двох середовищ  $\text{Mn}_3\text{O}_4/\text{Fe}_2\text{O}_3$ , дорівнює 2,4. Закономірно, що значення, отримані нами, ближчі до значень, наведених у роботі [7].

Аналіз отриманих результатів показує, що розподіл катіонів у приповерхневих шарах фериту надзвичайно чутливий до умов термообробки і парціальних тисків газової атмосфери. Оскільки явища дифузії зумовлені також процесами встановлення рівноважного розподілу іонів у твердофазному стані, то нерівномірний розподіл концентрації відображає ступінь незавершеності дифузійних процесів і може служити показником нерівноважності стану отриманого матеріалу.

Автори висловлюють подяку професору Б.К.Остафійчуку за сприяння у проведенні досліджень.

1. Дмитриев М.В., Летюк Л.М., Шипко М.Н. Исследование диффузии кислорода в поверхностных слоях Mn-Zn ферритов// Журн. техн. физ. - 1982. - Т.52. - №3. - С.527-528.
2. Дмитриев М.В., Летюк Л.М., Шипко М.Н. Исследование механических напряжений в поверхностных слоях Mn-Zn ферритов// Журн. техн. физ. - 1983. - Т.53. - №6. - С.1130-1132.
3. Остафийчук Б.К., Михарский С.Н., Федорив В.Д. и др. Влияние отжига в различных средах на структуру и свойства приповерхностного слоя Mn-Zn ферритов//Изв. АН СССР: Неорганич. материалы. - 1989. - Т.25. - вып.1. - С.1815-1519.
4. Копаєв О.В. Особливості рентгенофлуоресцентного аналізу феритів у тонких пробах//Вісник Прикарпат. ун-ту. Сер. природничо-математич. наук, 1995. Вип.1. - С.95-102.
5. Калинин Б.Д., Плотников Р.И. Оценка погрешности рентгено-спектрального анализа//Завод. лаб. - 1992. - №9. - С.21-22.
6. Ogawa S., Nakagawa Y. Cation Diffusion Coefficients and Vacancy Densities in Mn-Zn Ferrites//J.Phys.Soc.Japan. - 1967. - V.23. - №2. - P.179-184.
7. Башкиров Л.А., Паньков В.В. Механизм и кинетика образования ферритов. - Минск: Наука и тех. - 1988. - 262 с.

**І.Г.Кабан, В.М.Кланічка, Р.Б.Тяско**

### **СТРУКТУРА ДВОКОМПОНЕНТНИХ РІДКИХ СПЛАВІВ НА ОСНОВІ ОЛОВА**

*Методом рентгенівської дифракції досліджено будову сплавів Ga-Sn, Ge-Sn та Bi-Sn в рідкому стані. Встановлено, що розплави у всій області концентрацій мікронеоднорідні за складом і упаковкою атомів. В розплавах Ga-Sn та Ge-Sn існують мікрогрупування з атомів чистих компонентів. Структурними складовими розплавів Bi-Sn є мікрогрупування з чистих вісмуту і олова, та мікрогрупування складу  $Bi_{13,1}Sn_{86,9}$ . Показано, що структурний стан досліджених систем добре корелює з діаграмами фазових рівноваг. Проведено оцінку розмірів мікрогрупувань і кількості атомів в них.*

*The structure of Ga-Sn, Ge-Sn and Bi-Sn alloys in liquid state has been studied by X-ray diffraction. It has been established that the melts are microheterogeneous by the composition and atomic arrangement type over whole concentration range. There are microgroupings of atoms of pure components in the Ga-Sn and Ge-Sn melts. The microgroupings of pure bismuth and tin and  $Bi_{13,1}Sn_{86,9}$  microgroupings are the structure units of Bi-Sn melts. The structure of the investigated systems correlates with their phase equilibrium diagrams. The sizes of microgroupings and the quantity of atoms in them have been evaluated.*

Ще В.І.Данилов та І.В.Радченко, досліджуючи рідкий сплав Bi-Sn евтектичної концентрації [1], виявили, що експериментальна крива для цього сплаву дуже подібна до кривої, що одержується шляхом складання кривих інтенсивності чистих компонентів з відповідними коефіцієнтами. Ці результати пояснювались тим, що в евтектичному сплаві у рідкому стані існують області з чистих компонентів. Кількісних даних про структуру рідких евтектичних сплавів тоді не одержали, бо не було методів розрахунку функцій атомного розподілу для бінарних систем.

У роботі [2] було запропоновано модель мікронеоднорідної будови двокомпонентних металічних розплавів, за якою ці розплави складаються з мікроугруповань одного або двох типів. Всю область концентрацій можна поділити на кілька концентраційних інтервалів. Сплави, розміщені на межах концентраційних інтервалів, які були названі опорними, складаються з мікроугруповань одного типу, концентрація компонентів у яких така ж, як і в сплаві. Сплави кожного концентраційного інтервалу містять мікроугруповання двох типів, які відрізняються за складом і типом упаковки атомів. Кількість атомів кожного компонента в мікроугрупованнях цих сплавів пропорційна концентраціям компонентів у відповідних опорних сплавах. При зміні концентрації компонентів у розплаві, в межах одного концентраційного інтервалу, склад мікроугруповань не змінюється, змінюється лише частка мікроугруповань кожного типу. Така модель будови розплавів двокомпонентних систем дозволяє за експериментально отриманими дифракційними кривими, структурними факторами і функціями атомної густини опорних сплавів розрахувати аналогічні функції для сплавів проміжних складів. Рівняння, за якими можна проводити такі розрахунки, наведені в роботі [2].

Використання цієї моделі при дослідженні структури розплавів системи Ag-In [2], Ga-In [3] дозволило не лише отримати кількісну інформацію про розподіл різносортих атомів за мікроб'ємами, але й вивчити закономірності структурних змін в залежності від концентрації і температури.

Автори роботи [3] вперше дійшли висновку, що в розплавах системи Ga-In взаємна розчинність компонентів на мікрорівні в широкому температурному інтервалі залишається такою, як і в твердому стані при температурі евтектики.

Враховуючи нетривіальність висновків, необхідні дослідження структури розплавів інших двокомпонентних систем з діаграмою фазових рівноваг подібного типу. В зв'язку з цим ми вибрали для дослідження двокомпонентні сплави на основі олова, які характеризуються діаграмами стану простого евтектичного

типу, а саме системи Ga-Sn, Ge-Sn і Bi-Sn. Крім того, ми намагались вибрати для дослідження системи з низькою температурою ліквідуса і з помітною різницею в розмірах атомів, що їх утворюють. Перше дозволяло провести дослідження при великих перегрівках над ліквідусом, а друге мало привести до появи суттєвих відмінностей на кривих інтенсивності, структурних факторах і функціях атомного розподілу для сплавів різного складу.

Сплави для дослідження були приготовлені з особливо чистих галію, германію, вісмуту і олова (99,99). Зразки сплавліались в атмосфері гелію і витримувались при температурі 1230 К протягом двох годин. Рентгенограми отримані в  $\text{MoK}_\alpha$ -випромінюванні на  $\Theta$ - $\Theta$  дифрактометрі в атмосфері гелію. Кристал-монокроматор (монокристал графіту) був встановлений перед детектором. Час зйомки однієї точки вибирався так, щоб статистична похибка підрахунку на "хвості" кривої не перевищувала 1,5%.

Системи Ga-Sn та Ge-Sn простого евтектичного типу, а взаємна розчинність компонентів у твердому стані практично відсутня [4, 5]. Враховуючи результати робіт [1, 3], можна припустити, що і в рідкому стані галій та олово і германій та олово взаємно не розчинятимуться на мікрорівні. Це означає, що за моделлю мікронеоднорідної будови [2] в розплавах Ga-Sn та Ge-Sn існуватимуть мікроугруповання з атомів чистих компонентів, і всю область концентрацій даних систем можна розглядати як один концентраційний інтервал, а розплави чистих галію і олова та германію і олова будуть опорними відповідно. В такому випадку, рівняння, отримані в [2], матимуть такий вигляд:

$$I(s) = C_1 I_1(s) + C_2 I_2(s); \quad (1)$$

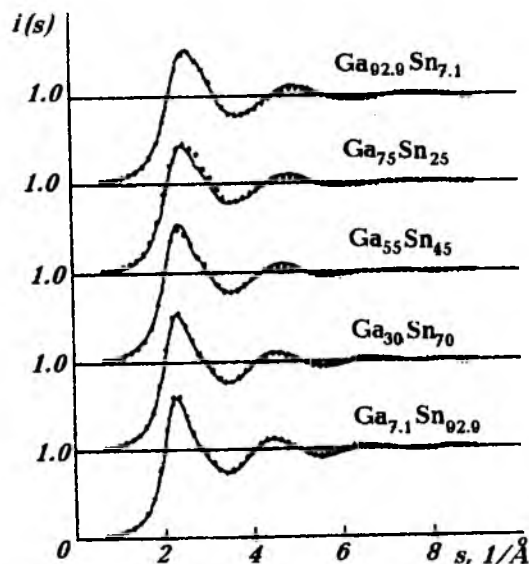
$$i(s) = C_1 \frac{f_1^2}{c_1 f_1^2 + c_2 f_2^2} i_1(s) + C_2 \frac{f_2^2}{c_1 f_1^2 + c_2 f_2^2} i_2(s); \quad (2)$$

$$\rho(r) = C_1 \frac{f_1^2}{c_1 f_1^2 + c_2 f_2^2} \rho_1(r) + C_2 \frac{f_2^2}{c_1 f_1^2 + c_2 f_2^2} \rho_2(r), \quad (3)$$

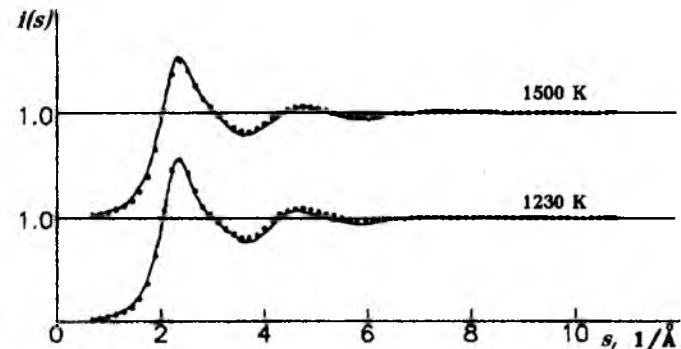
де  $s = (4\pi \sin\theta) / \lambda$  - модуль дифракційного вектора;  $\lambda$  - довжина хвилі;  $2\theta$  - кут розсіяння;  $C_1$  і  $C_2$  - концентрації першого і другого компонента в сплаві;  $f_1$  і  $f_2$  - їх атомні фактори;  $I_1(s)$ ,  $I_2(s)$ ,  $i_1(s)$ ,

$i_2(s)$ ,  $\rho_1(r)$ ,  $\rho_2(r)$  - дифракційні криві, структурні фактори і функції атомної густини для першого і другого компонента відповідно;  $I(s)$ ,  $i(s)$  та  $\rho(r)$  - аналогічні функції для сплаву з концентраціями компонентів  $C_1$  і  $C_2$  відповідно.

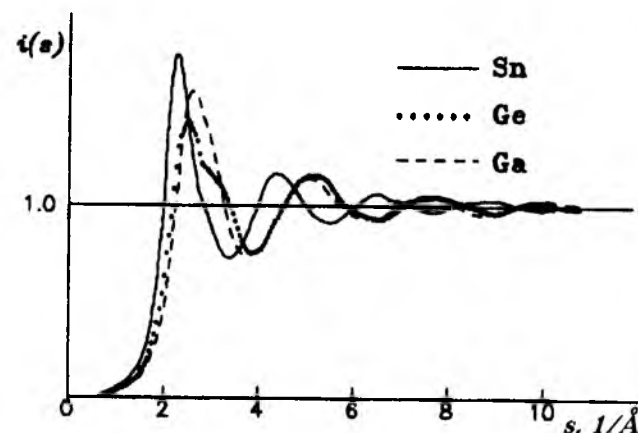
Ми розраховали за рівнянням (2) структурні фактори сплавів Ga-Sn та Ge-Sn. Склади досліджених сплавів вказані на мал. 1, 2, а структурні фактори, за якими вівся розрахунок, - на мал.3. Як видно з мал.1, 2, розраховані і експериментальні криві збігаються в межах похибки експерименту.



Мал. 1. Експериментальні (—) і розраховані (\*\*\*) структурні фактори для сплавів Ga-Sn при 1500 К.



Мал. 2. Експериментальні (—) і розраховані (\*\*\*) структурні фактори сплаву  $Ge_{59.9}Sn_{40.1}$ .

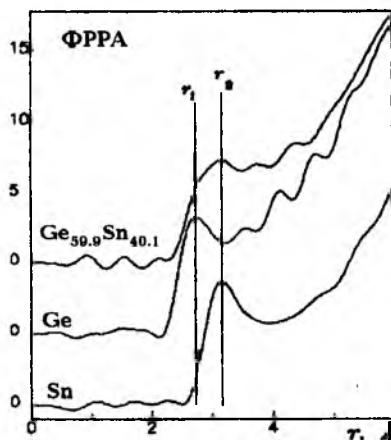


Мал. 3. Структурні фактори чистих Ga, Ge і Sn при 1230 К.

Досить цікавим є і такий факт. Внаслідок помітної різниці ( $\approx 13\%$ ) в розмірах атомів олова та германію і галію, структурний фактор рідкого олова суттєво відрізняється від структурних факторів рідких галію та германію, відмінності між якими незначні (тільки в області головного максимуму). Найпомітніші відмінності в положенні піків (мал. 3). Так, максимуми структурного фактора олова зсунуті в сторону менших  $s$  порівняно з галієм і германієм.

З ростом порядкового номера максимуму зміщення збільшується, і вже третій максимум  $i(s)$  рідкого олова збігається з мінімумом  $i(s)$  рідких галію і германію. Якщо двокомпонентні розплави Ga-Sn та Ge-Sn справді складаються з однокомпонентних мікрогруповань, то останнє повинно приводити до швидшого, порівняно з чистими компонентами, затухання інтерференційних функцій сплавів із вмістом олова від 40 до 60 відсотків. Все це і спостерігається на експериментальних кривих. Дійсно, для сплавів Ga-Sn та Ge-Sn приблизно рівноатомного складу інтерференційна функція практично збігається з одиницею, вже починаючи із значень  $6 \text{ \AA}$  вектора дифракції (мал. 1, 2).

На мал. 4 зображено функції радіального розподілу атомів для сплаву  $\text{Ge}_{59,9}\text{Sn}_{40,1}$  і чистих олова та германію при 1500 К. Розщеплення головного максимуму ФРРА для сплаву і поява двох піків, положення яких відповідає положенню головних максимумів на ФРРА рідкого германію і олова, також свідчить про мікронеоднорідний характер структури сплаву на основі германію і олова та існування мікрообластей, переважно з атомів одного компонента, які розсіюють рентгенівське випромінювання незалежно.



Мал. 4. ФРРА сплаву  $\text{Ge}_{59,9}\text{Sn}_{40,1}$  та чистих Ge і Sn при 1500 К.

Система Bi-Sn також характеризується простою діаграмою фазових рівноваг евтектичного типу. Проте, якщо олово практично не розчиняється у вісмуті, то в олові розчиняється до 13,1% ат. вісмуту [6].

Ми вже згадували про результати дослідження системи Bi-Sn, отримані в роботі [1]. В роботі [7] досліджувався сплав евтектичної концентрації ( $\approx 57\%$  ат. Sn) при 150 і 400 °С. На основі аналізу кривих інтенсивності і функцій атомного розподілу, автори дійшли висновку про існування в розплаві невеликих областей, які складаються переважно з атомів одного сорту з упаковкою, що властива чистим компонентам. Така "квазіевтектична" структура зберігається, на їх думку, не тільки при температурі, близькій до точки кристалізації, але й при вищих температурах.

У роботі [8], за допомогою рентгенографічних досліджень на  $\Theta-\Theta$  дифрактометрі, також встановлено, що при температурах близьких до ліквідуса в розплавах Bi-Sn існують дві структури, які відповідають структурам рідкого Bi та Sn відповідно. При вищих температурах, на погляд авторів, розплави Bi-Sn, очевидно, розупорядковуються.

Нами досліджено п'ять сплавів Bi-Sn при температурах 570 і 970 К. Оскільки в олові розчиняється 13,1% ат. вісмуту, ми припустили, що структурними складовими сплавів Bi-Sn є мікрогруповання складу  $\text{Bi}_{13,1}\text{Sn}_{86,9}$  і мікрогруповання з атомів чистих компонентів.

У такому випадку, рівняння для структурного фактору, отримане в роботі [2] для першого концентраційного інтервалу (100 - 13,1 % ат. Bi), запишеться у вигляді:

$$i(s) = \frac{C_1^* - 1}{C_1^*} \frac{C_1^* f_1^2 + C_2^* f_2^2}{C_1^* f_1^2 + C_2^* f_2^2} i_*(s) + \frac{C_1^* - C_1}{C_1^*} \frac{f_2^2}{C_1^* f_1^2 + C_2^* f_2^2} i_{\text{Bi}}(s). \quad (4)$$

Тут  $C_1^*$  і  $C_2^*$  - концентрація вісмуту і олова в сплаві, для якого ведеться розрахунок;  $C_1$  і  $C_2$  - концентрація атомів вісмуту і олова, відповідно, в опорному сплаві (тобто  $C_1^* = 0,131$  і  $C_2^* = 0,869$ );



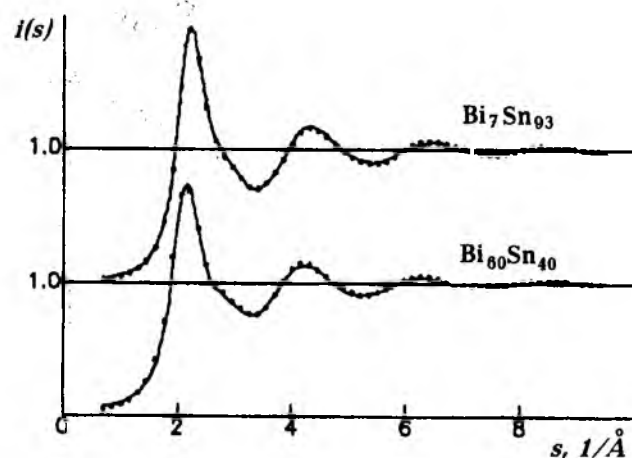
$i(s)$  - структурний фактор опорного сплаву,  $i_{Bi}(s)$  - структурний фактор рідкого вісмуту.

Для другого концентраційного інтервалу (86,9 - 100 % ат. Sn) рівняння, отримане у роботі [2], матиме вигляд:

$$i(s) = \frac{C_1^y}{C_1^*} \frac{C_1^* f_1^2 + C_2^* f_2^2}{C_1^y f_1^2 + C_2^y f_2^2} i_*(s) + \frac{C_1^* - C_1^y}{C_1^*} \frac{f_2^2}{C_1^y f_1^2 + C_2^y f_2^2} i_{Sn}(s). \quad (5)$$

Тут  $C_1^y$  і  $C_2^y$  - концентрація вісмуту і олова в сплаві з другого концентраційного інтервалу;  $C_1^*$ ,  $C_2^*$ ,  $i_*(s)$  - ті, що і в рівнянні (4).

Після обробки експериментальних даних ми розрахували структурні фактори для досліджуваних сплавів за рівняннями (4, 5). На мал. 5 видно добре узгодження розрахунку з експериментом, що підтверджує наші припущення і правильність вибраної моделі.



Мал. 5. Експериментальні (—) і розраховані (\*\*\*) структурні фактори сплавів Bi-Sn при 970 К.

Таким чином, в результаті проведених рентгенографічних досліджень, математичних розрахунків, аналізу інтерференційних функцій і функцій радіального розподілу атомів, можна стверджувати, що двокомпонентні розплави системи Ga-Sn, Ge-

Sn і Bi-Sn мікронеоднорідні в усій області концентрацій і при досить великих перегрівах над температурою ліквідуса. Структурними складовими розплавів систем Ga-Sn та Ge-Sn є мікрогрупування з атомів чистих компонентів, а в системі Bi-Sn, крім одноатомних мікрогрупувань, існують ще мікрообласті складу  $Bi_{13,1}Sn_{86,9}$ . Мікрогрупування є досить стабільними атомними утвореннями, і підвищення температури розплавів веде лише до зменшення їх розмірів. В таблиці 1 наведено основні структурні характеристики рідких Ga, Ge, Sn і Bi, мінімально можливі розміри мікрогрупувань та кількість атомів в них:  $s_1$  та  $i(s_1)$  - положення і висота головного максимуму структурного фактора,  $r_1$  - найбільш ймовірна міжатомна відстань,  $R_k$  - радіус кореляції, який є мінімально можливим радіусом мікрогрупувань,  $N$  - мінімально можлива кількість атомів у мікрогрупуваннях.

Таблиця 1.  
Основні структурні характеристики рідких Ga, Ge, Sn, Bi.

Об'єкт дослідження	Темп., К	$s_1, \text{Å}^{-1}$	$i(s_1)$	$r_1, \text{Å}$	$R_k, \text{Å}$	N
Ga	570	2,54	2,03	2,80	11,8	340
	970	2,55	1,76	2,76	10,7	260
	1230	2,56	1,67	2,76	9,6	170
	1500	2,55	1,57	2,78	9,0	140
Sn	570	2,26	2,36	3,15	14,6	430
	970	2,24	1,95	3,15	12,8	240
	1230	2,26	1,79	3,15	12,0	180
	1500	2,25	1,65	3,15	10,7	110
Ge	1230	2,50	1,48	2,71	10,5	170
	1500	2,49	1,44	2,73	8,6	120
Bi	570	2,07	2,13	3,32	13,3	270
	970	2,08	1,73	3,30	11,5	170

1. Данилов В.И. Строение и кристаллизация жидкостей. - Киев: Изд-во АН УССР, 1956. - 568 с.
2. Ильинский А.Г., Михайлова Л.Е., Романова А.В. и др. Описание структуры двухкомпонентных расплавов в рамках микрогетерогенной модели // Магнитные и электронные свойства материалов. - Киев: Наук. думка, 1990. - С.75-82.
3. Бухаленко В.П., Ильинский А.Г., Романова А.В. и др. Рентгенодифракционное исследование структуры жидких сплавов системы индий-галлий // Металлофизика. - 1991. - Т.13. - №10. - С.92-96.
4. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов. - М.: Металлургиздат, 1962. - Т.2. - С.609-1488.
5. Эллиот Р.П. Структуры двойных сплавов. - М.: Металлургия, 1970. - Т.2. - 427 с.
6. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов. - М.: Металлургиздат, 1962. - Т.1. - 608 с.
7. Лашко А.С., Романова О.В. Будова деяких рідких сплавів // Укр. фіз. журн. - 1958. - Т.3. - №3. - С.375-377.
8. W.Hoyer, G.Herms. Wide Angle X-ray Scattering on Melts / In "Physical Research Amorphous Structures" ed. D.Schulze. Academic Verlag, Berlin, 1990. - P.97-102.

**В.М.Ткачук, О.М.Ткачук.**

## **МОДЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ІОННОЇ ІМПЛАНТАЦІЇ В БАГАТОКОМПОНЕНТНІ СТРУКТУРИ**

*Для розрахунку характерних статистичних величин процесу іонної імплантації в багатокомпонентній мішені для різних типів іонів застосовано метод Монте-Карло в використаннім наближених виразів для кутів розсіювання.*

*Monte-Carlo Method using the approximate expressions of scattering angles is applied to calculate characteristic statistical values of ion implantation process in manycomponent targets for the various ions.*

Питанню експериментального вивчення впливу іонної імплантації (ІІ) на структуру і магнітні властивості монокристалічних плівок  $Y_3Fe_5O_{12}$  в літературі приділена досить велика увага [1]. Теоретичні дослідження процесів ІІ в таких складних структурах, якими є плівки залізо-ітрієвого гранату, є практично неможливим. Досить ефективними, як показує аналіз літератури, в таких випадках є методи моделювання, і зокрема, метод Монте-Карло (М-К).

Використанню методу М-К для опису проходження високоенергетичних іонів через кристалічне тіло та процесів, викликаних їх впровадженням, присвячено цілий ряд публікацій, які відрізняються підходами до розрахунку основних величин з метою отримання точніших результатів та зменшення часу розрахунку на ЕОМ. Аналіз літератури підтверджує, що метод М-К є найбільш ефективним для моделювання процесу ІІ в багатошарові та багатокомпонентні системи, оскільки дозволяє отримати найбільш повну інформацію як про первинні, так і про вторинні процеси, викликані ІІ.

Теоретичні підходи до опису процесів, що відбуваються при проходженні високоенергетичної частинки крізь тверде тіло, є добре відомими, але практично розрахунок кута розсіювання імплантованої частинки із класичного інтегралу розсіювання (1) ви-

магає великих затрат машинного часу, тому нами було використано альтернативні аналітичні вирази для розрахунку кутів розсіювання на базі апроксимаційних виразів для потенціалу Мольєра, запропоновані в [2].

Класичний інтеграл розсіювання має вигляд:

$$\theta_m = \pi - 2b \int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E_r}}} \quad (1)$$

де  $b$  - прицільний параметр,  $E_r$  - відносна кінетична енергія,  $r$  - між-атомна віддаль,  $R_0$  - апсис зіткнення, що визначається з рівняння

$$1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E_r} = 0$$

Розрахувавши кут розсіювання налітаючої частинки, легко прослідкувати за розвитком усього каскаду зіткнень, викликаного первинною частинкою, а прослідкувавши велике число окремих іонних "історій" частинок можна розрахувати такі величини, що характеризують процес II: проективний пробіг  $R_p$ , стандартне відхилення  $\Delta R_p$ , асиметрію та ексцес профілю.

При моделюванні припускається, що імовірність розсіювання на тій чи іншій компоненті мішені пропорційна її концентрації. Кристалічна структура матриці не враховується, а властивостями, пов'язаними з певними напрямками кристалічної ґратки, нехтуємо - таке наближення дає задовільні результати, якщо можна не зважати на ефекти каналювання (II структур  $Y_3Fe_5O_{12}$  проводять саме так, щоб ефекти каналювання виключались.)

Результати розрахунків для деяких типів іонів приведено в табл.1.

Слід відмітити, що приведені вище результати знаходяться в непоганій відповідності з результатами експериментальних досліджень, приведеними в [1,3].

Таблиця 1.

	Іон	E (кеВ)	$R_p$ (А)	$\Delta R_p$ (А)	Асиметрія профілю	Ексцес
1.	He	120	6840	1510	-0.87	3.87
2.	B	80	2100	770	-0.32	2.58
3.	C	80	1730	650	-0.34	2.62
4.	Ni	80	1480	590	-0.15	2.46
5.	O	90	1280	520	-0.06	2.51
6.	F	95	1330	540	-0.08	2.65
7.	Ne	80	1020	420	-0.08	2.59
8.	P	80	660	280	0.09	2.57
9.	Ar	80	550	240	0.18	2.66
10.	As	80	300	120	0.25	2.76

Для випадку тяжких іонів ( $Z > 30$ ) спостерігаються найбільші відхилення розрахунків від експериментальних даних, що пов'язано з досить проблематичним використанням в цьому випадку наближення бінарних зіткнень, яке застосовується при моделюванні.

Для більш точного визначення теоретичного профілю необхідний дальший розвиток і вдосконалення використання моделі з метою врахування залежності довжини вільного пробігу від енергії частинки, що розсіюються, а також ефектів селективного іонного переміщення приповерхневих шарів мішені.

1. Б.К.Остафійчук, В.А.Олейник, В.М.Пыльпив и др. Кристаллическая и магнитная структура имплантированных слоев монокристаллических пленок железо-иттриевого граната. Препринт ИМФ1.91. - Киев, 1991. - 70 с.
2. Sielanko J., Szyszko V. Simple Monte Carlo Computer Procedure for the Depth Parameters Determination of Implanted Ions in Amorphous Targets// Ann. UMCS. Soc. AAA. Phys. - 1984. - v.39. - P.17-22.
3. В.В.Немошкеленко, Б.К.Остафійчук, В.М.Пыльпив и др. Структура и свойства приповерхностного слоя железо-иттриевого граната, имплантированного бором // Доклады АН УССР, Серия А. -1988. - №6. - С.45-48.

Л.М.Смеркло, Т.П.Владімірова

### ГІБРИДНО-ІНТЕГРАЛЬНІ ДЖЕРЕЛА ПОТУЖНИХ НАНОСЕКУНДНИХ ІМПУЛЬСІВ ДЛЯ ТЕХНІКИ МІЛІМЕТРОВОГО ДІАПАЗОНУ ХВИЛЬ

*Подано короткий аналіз розробок джерел потужних наносекундних імпульсів струму - імпульсних модуляторів для генераторів РЕС міліметрового діапазону хвиль. Сформовано проблему твердотільної інтеграції і визначено напрямки її розв'язання. Розглянуто результати розробки і виготовлення гібридно-інтегральних джерел потужних наносекундних імпульсів - імпульсних модуляторів для генераторів на лавинопролітних діодах.*

*A short analysis of powerful nanosecond current impulses elaboration sources is given-impulse modulators for the regenerator REC of millimetre wave's range. The problem of hardbodied intergration is formulated and the directions of its solution are determined. The results of the elaboration and the production of hybrid-integral sources of powerful nanosecond impulses are examined, i. e. impulse modulators for the regenerators on avalanche transit-time diodes.*

Протягом останнього десятиріччя зріс інтерес до техніки міліметрового діапазону хвиль (ММДХ). Це зумовлено цілою низкою відомих переваг радіоелектронних систем (РЕС) цього діапазону перед системами інших радіодіапазонів, в тому числі надвисокочастотного і оптичного діапазону [1].

Однією з актуальних проблем освоєння ММДХ для цього класу спеціалізованих РЕС є створення спеціальних джерел (формуваачів) потужних наносекундних імпульсів. Область їх застосування досить велика - імпульсні модулятори, лазерна техніка, пристрої магнітної електроніки.

Схеми таких джерел характеризуються великими рівнями імпульсної потужності, високою швидкістю, спеціальною формою вихідних імпульсів. Їх характерною рисою є робота в режимі

великої щільності коротких імпульсів, що дозволяє зняти обмеження теплового характеру і таким чином істотно підвищити імпульсні характеристики.

Особливості реалізації, принципи побудови, схемотехніка вказаних потужних імпульсних пристроїв наносекундного діапазону висвітлені в багатьох роботах [2-6].

Успіх їх розробки значною мірою визначається характеристиками існуючої елементної бази. Незважаючи на розвиток мікроелектроніки і високі темпи нарощування випуску ІС, їх проникнення практично у всі галузі техніки, цілі класи електронних схем залишались на рівні дискретних компонентів. Одним з таких класів є потужні імпульсні пристрої наносекундного діапазону. Це - формувачі потужних наносекундних імпульсів, модулятори, генератори імпульсного струму [2-5].

Суперечливі вимоги великих імпульсних потужностей і високої швидкодії обмежували можливість інтеграції і мікромініатюризації таких пристроїв. Однак розробка і випуск безкорпусних дискретних імпульсних транзисторів та діодів середньої та великої потужності дозволили останнім часом створити в гібридному виконанні формувачі потужних наносекундних імпульсів, імпульсні модулятори. Таким чином гібридні мікрозборки скоротили масо-габаритні показники цих пристроїв і на перших етапах задовольнили вимоги до їх мініатюризації. Проте розширення функціональних можливостей, необхідність забезпечення електричного регулювання параметрів імпульсного струму, вимоги до багатоканальності таких джерел струму супроводжуються збільшенням кількості дискретних елементів, які входять до складу гібридної мікрозборки, пониженням їх надійності, технологічності, підвищенням собівартості.

Вказані причини, разом з вимогами мікромініатюризації РЕС, привели до необхідності розробки напівпровідникових ІС потужних імпульсних пристроїв наносекундного діапазону. Визначальним фактором, який дозволяє розглядати проблему розробки і реалізації ІС, є режим роботи вказаних пристроїв,

переважно з великою щільністю коротких імпульсів. Критерієм короткочасності імпульсів у даному випадку є незначна, порівняно з дією аналогічної безперервної потужності, теплова релаксація інтегральних елементів та ІС в цілому. Ця обставина, в сукупності з принципово некритичним середнім тепловиділенням за період проходження імпульсів, дозволяє припустити можливість створення імпульсних пристроїв наносекундного діапазону в монолітному виконанні.

Найбільш близькою за цілями і отриманими параметрами, згідно з викладеною проблемою, є розробка модифікованої ІС формувача потужних імпульсів, запропонована в [5, 6].

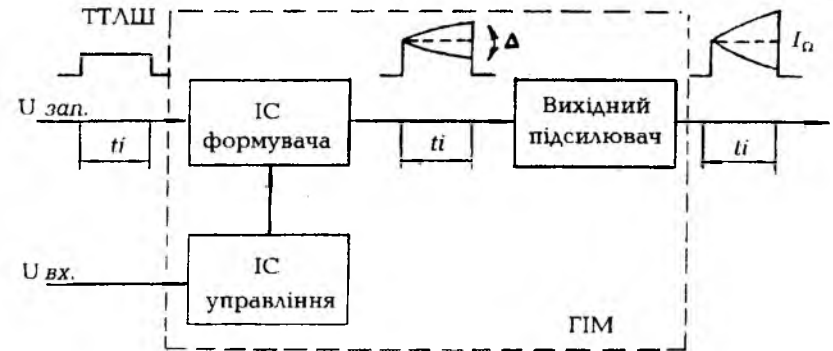
В порівнянні з серійними, дана схема [5] характеризується значним зменшенням потужності, що розсіюється в кристалі, однак описане технічне рішення неприйнятне для інтеграції потужних імпульсних схем наносекундного діапазону. Основними причинами цього є: низька швидкодія (час затримки 55 нс), невелика амплітуда імпульсів, які формуються ( $U_{\text{імп.}} < 30 \text{ В}$ ), велика залишкова напруга на ключі з польовим транзистором Шоттки, неможливість створення в кристалі ключових каскадів з глибоким насиченням, низький ступінь інтеграції потужних елементів.

Таким чином, монолітна інтеграція потужних імпульсних схем є досить складною проблемою, вирішення якої традиційними методами, а точніше - на основі відомих класів напівпровідникових ІС, практично неможливе. Вона вимагає розв'язання таких основних задач [7-12] (Авт. свідоцтва №1452409, №1660535, №1748581 СССР/З.Ю.Готра, Р.А.Голяка, А.М.Смеркло): створення нової елементної бази, а саме - потужних швидкодіючих імпульсних інтегральних біполярних і МДН транзисторів, діодів з бар'єром Шоттки; розробки електричних схем; проектування конструкції і розробки технології виготовлення кристалів ІС в цілому на основі нової елементної бази.

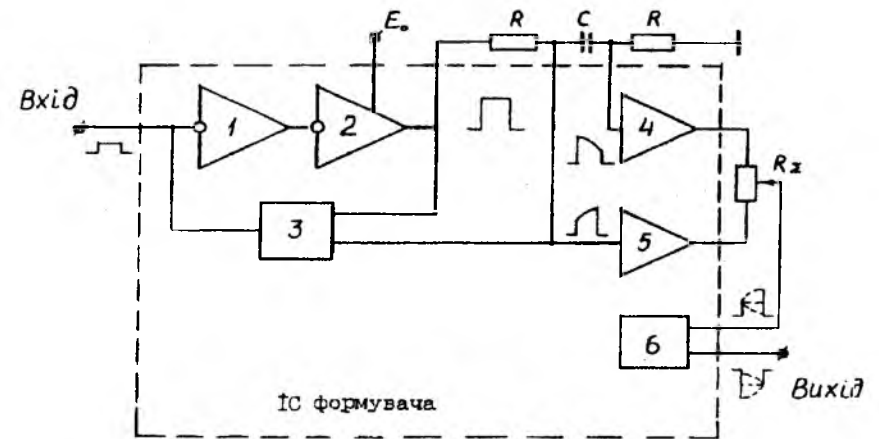
У статті наведені результати розробки напівпровідникових ІС [11-12] і створення на їх основі гібридно-інтегральних модулів

(ГІМ) джерел потужних наносекундних імпульсів струму (імпульсних модуляторів) для модуляції радіосигналів генераторів ММДХ на лавинопролітних діодах (ЛПД) за перспективною комбінованою гібридно-інтегральною технологією [13].

Такий ГІМ, функціональна схема якого зображена на мал.1, містить ІС формувача, ІС управління, вихідний підсилювач.



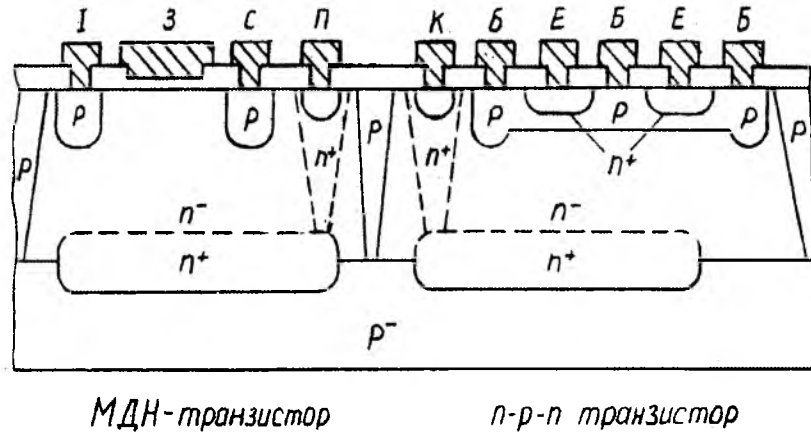
Мал.1. Функціональна схема ГІМ.



Мал.2. Структурна схема ІС формувача.

ІС формувача, структурна схема якого зображена на мал.2, формує імпульси струму трапецієдальної форми з електричним

регулюванням амплітуди вихідного імпульсу і регульованим нахилом його вершини. Їх тривалість  $t_i$  задається тривалістю вхідних імпульсів запуску. Інтегральна схема реалізована за суміщеною кремнієвою технологією виготовлення інтегральних біполярних р-п і р-каналних МДН транзисторів, діодів Шоттки. Ізоляція елементів ІС - зворотнорозміщеним р-п переходом. Переріз структури ІС зображено на мал.3.



Мал.3. Переріз структури ІС формувача.

Основні технічні характеристики ІС формувача:

- максимальна амплітуда імпульсів, які формуються:
  - напруги - 40 В,
  - струму - 0,6 А;
- тривалість імпульсів - 50... 300 нс;
- тривалість фронту і спаду - не більше 10 нс;
- щільність імпульсів - не менше 30;
- діапазон регулювання нахилу вершини імпульсу  $\pm 50\%$ ;
- діапазон регулювання амплітуди імпульсу:
  - напруги - 10... 40 В,
  - струму - 0,1... 0,6 А;
- управління стандартними логічними рівнями сигналів цифрових ІС ТТЛШ додатної полярності (2,5... 5 В);

- напруга живлення - + 50 В, - 5 В;
- потужність розсіювання: імпульсна - не більше 100 Вт  
постійна - не більше 3 Вт;
- розмір кристалу ІС - 2,6x3 мм.

Кількість ключових елементів, які входять до складу кристалу ІС, з максимальними імпульсними струмами - 300 мА (10 шт.), 600 мА (3 шт.). Загальний рівень інтеграції - приблизно 100 елементів на кристал.

ІС формувача встановлюється на одну мікроплату розміром 12x15 мм. Для виконання схеми формувача з використанням безкорпусних дискретних елементів необхідно застосувати дві мікроплати розміром 48x30 мм.

ІС управління задає амплітуду імпульсів (струму, напруги) на виході ІС формувача і може працювати у двох режимах - стабілізатора напруги або керованого перетворювача рівня напруги. Режим роботи задається за допомогою перекомутації зовнішніх ланок ГІМ.

Таким чином забезпечується керування амплітудою імпульсів струму на виході ІС формувача і ГІМ в цілому, а це дозволяє виконувати електричну перенастроюку частоти ЛПД генераторів або налаштувати їх на оптимальну потужність.

Основні технічні характеристики ІС управління такі:

- діапазон вихідної напруги - 10... 45 В;
- температурний коефіцієнт вихідної напруги - менше  $0,01\%/^{\circ}\text{C}$ ;
- відносна зміна зовнішнього керуючого сигналу - 5...30%;
- максимальний вхідний струм -  $5 \cdot 10^{-5}$  А;
- напруга живлення - + 50 В;
- наявність захисту від короткого замикання навантаження;
- режим роботи: стабілізатор напруги, керуючий перетворювач рівня напруги;
- розсіювана потужність - не менше 3 Вт;
- розмір кристалу ІС - 2,6x3 мм.

ІС управління встановлюється на мікроплату розміром 12x15 мм, тоді як при традиційному виконанні, з використанням безкорпусної елементної бази, необхідно застосувати дві мікроплати розміром 48x30 мм.

При необхідності одержання імпульсів струму з амплітудою не більше 0,6 А, виходом ПІМ може бути вихід ІС формувача (мал.2). Для одержання імпульсів струму з амплітудами (5... 15) А в ПІМ встановлюють мікроплату вихідного підсилювача розміром 48x30 мм, яка містить в якості потужного вихідного транзистора підсилювача безкорпусний варіант КТ 922 або КТ 974. Вихідний підсилювач живиться напругою +50 В, електрично зв'язаний з ІС формувача і, не змінюючи форми імпульсу струму з виходу ІС формувача, підсилює його за струмом.

Таким чином ПІМ джерела імпульсного струму для ЛПД генератора, при використанні дискретних безкорпусних елементів, потребує приблизно 5-6 мікроплат розміром 48x30 мм в товстоплівковому виконанні. Габарити такого модуля - 150x80x20 мм. При використанні ІС формувача та ІС управління кількість мікроплат в ПІМ зменшується до двох (24x30 мм і 48x30 мм), а габарити його - 80x60x15 мм.

Запропоноване розв'язання проблеми твердотільної інтеграції імпульсних модуляторів для генераторів ММДХ на ЛПД дозволяє значно покращити їх технічні характеристики, підвищити надійність і технологічність, втричі зменшити габаритно-вагові показники, розширити сферу їх використання.

1. Гуткин Л.С. Современная радиоэлектроника и ее проблемы. - М.: Сов. радио, 1980. - 190 с.
2. Шмелев К.Д., Королев Г.В. Источники электропитания лазеров. - М.: Энергоиздат, 1981. - 180 с.
3. Коцержинский Б.А. и др. Импульсные генераторы миллиметрового диапазона волн на ЛПД//Изв. вузов: Радиоэлектроника. - 1982. - Вып. 10. - С.56-64.
4. Блонский Л.А. Источник наносекундных импульсов тока//Обмен опытом в радиопромышленности. - М.: НИИЭИР, 1986. - вып.1. - С.83-85.
5. Быстродействующие интегральные формирователи импульсного тока/Авт. коллектив: Адамов Ю.Ф., Голубев А.П., Дорошен-

- ко Б.С., Дубов Ю.Н. и др.//Электрон. техника: Сер. микроэлектроники. - 1982. - Вып.3 (99). - С.13-16.
6. Адамов Ю.Ф., Голубев А.П. Особенности изготовления совмещенной структуры с полевым транзистором, управляемым барьером Шоттки//Сб. науч. трудов по пробл. микроэлектроники. - М., 1977. - Вып. 34. - С.47-55.
  7. Голяка Р.Л., Смеркло Л.М. Исследование режима перехода к омическому квазинасыщению в коллекторе мощного интегрального биполярного транзистора//Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОВР. - 1991. - Вып.22.
  8. Голяка Р.Л., Смеркло Л.М. Оптимизация топологии мощного интегрального импульсного транзистора//Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОВР. - 1991. - Вып.22.
  9. Готра З.Ю. и др. Исследование распределения плотности тока в интегральной диодной структуре с барьером Шоттки при высоком уровне инжекции//Электрон. техника. Сер. микроэлектрон. устройств. - 1990. - Вып.6. - С.40-42.
  10. Голяка Р.Л. и др. Оптимизация площади выпрямляющего контакта металл-полупроводник мощных интегральных диодов Шоттки//Электрон. техника. Сер. микроэлектрон. устройств. - 1990. - Вып.6. - С.42-45.
  11. Голяка Р.Л. и др. Интегральный формирователь мощных наносекундных импульсов//ИЛ, 1990. - С.60-73.
  12. Смеркло Л.М. Інтегральні формувачі імпульсів для НВЧ пристроїв міліметрового діапазону хвиль//Зб. матеріалів Міжнар. наук.-техн. конф. "Сучасні проблеми автоматизованої розробки і виробництва радіоелектронних засобів та підготовки інженерних кадрів", 21-27 лют. 1994 р. - Львів, 1994. - С.29-30.
  13. Jaunin J.P., Rauch N. Hybridtechnik: Mikroelektronik zwischen Leiterplatten und integrierten Schaltungen// Elektronik. - 1989. - V.38. - N 10. - S.79-84, 86, 87.

В.Л.Кегелес, М.О.Вольченко, Д.А.Вольченко

### ДО РОЗРАХУНКУ СИЛ ІНЕРЦІЇ ПОРШНЕВОГО КОМПРЕСОРА

Запропоновано поточнену методику розрахунку інерційних сил поршневого компресора. Теоретично доведено та експериментально підтверджено доцільність використання вказаної методики для швидкохідних машин ввортньо-поступальної дії.

Improved calculational technique of inertial forces which effect the piston compressor is suggested. The advisability of the present technique for high-spud machines with back and forward drive has been theoretically documented and experimentally proved.

Одним з перспективних шляхів підвищення продуктивності поршневих компресорів є збільшення частоти обертання їх колінчастого вала [1]. Але водночас суттєво зростає рівень вібрацій, які виникають внаслідок незрівноваженості сил інерції, що значно обмежує термін служби обладнання. З метою досягнення максимальної зрівноваженості сил, що діють в ланках кривошипно-шатунного механізму на початковій стадії зазначеного процесу необхідно вміти провести точний силовий розрахунок.

Сучасні методику розрахунку [2,3] є дуже недосконалими саме для високооберткових поршневих машин, оскільки нехтують тим, що шатун здійснює плоско-паралельний рух. Вважають, що третина маси шатуна рухається поступально разом з поршнем, а решта здійснює обертальний рух разом з колінчастим валом. Незважаючи на простоту розрахунку ці методику не можна використовувати через суттєві розбіжності розрахункових та експериментальних даних. Останній факт зумовив нагальну потребу в створенні поточної методики розрахунку сил інерції високооберткових поршневих компресорів, яка б врахувала дійсні види руху всіх ланок його кривошипно-шатунної групи.

Найбільшої актуальності проблема зрівноваженості набуває зі збільшенням частоти обертання колінчастого вала саме для вертикальних поршневих компресорів (мал.1). Модуль сили інерції визначається масою ланок та прискоренням їхніх центрів мас, тобто кінематичними параметрами руху точок і ланок механізму. Для розрахунку зазначених параметрів скористаємося методом полюса [4], у відповідності до якого можна записати такі векторні рівняння (точка  $A$  – полюс):

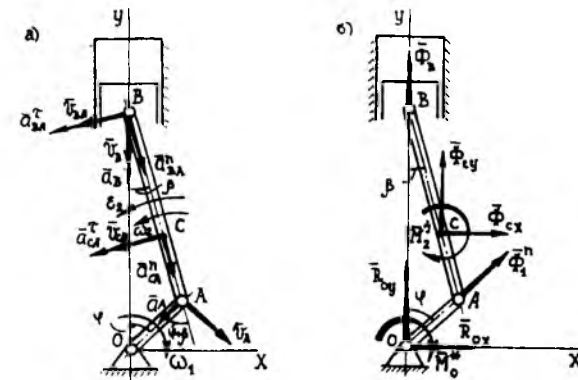
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad (1)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t; \quad (2)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^t, \quad (3)$$

де  $\vec{V}_B, \vec{V}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_A, \vec{a}_C$  - швидкості та прискорення точок:  $B$  - шатуна (поршня),  $A$  - полюса та  $C$  - центра мас шатуна;

$\vec{V}_{BA}, \vec{a}_{BA}^n, \vec{a}_{BA}^t, \vec{a}_{CA}^n, \vec{a}_{CA}^t$  - швидкість, нормальні та дотичні прискорення точок  $B$  і  $C$  в їхньому обертальному русі навколо полюса  $A$ .



Мал. 1 Кривошипно-шатунний механізм одного ряду поршневого компресора

$a$  - швидкості та прискорення точок і ланок механізму;  
 $b$  - інерційні сили, що діють на ланки механізму.

Рівняння (1-3) в проекціях на декартові вісі координат мають вигляд:



$$O = V_A \cdot \cos \varphi - V_{BA} \cdot \cos \beta; \quad (4)$$

$$O = -a_A \cdot \sin \varphi + a_{BA}^n \cdot \sin \beta - a_{BA}^t \cdot \cos \beta; \quad (5)$$

$$a_{C_x} = -a_A \cdot \sin \varphi + a_{CA}^n \cdot \sin \beta - a_{CA}^t \cdot \cos \beta; \quad (6)$$

$$-V_B = -V_A \cdot \sin \varphi - V_{BA} \cdot \sin \beta; \quad (7)$$

$$-a_B = -a_A \cdot \cos \varphi - a_{BA}^n \cdot \cos \beta - a_{BA}^t \cdot \sin \beta; \quad (8)$$

$$a_{C_y} = -a_A \cdot \cos \varphi - a_{CA}^n \cdot \cos \beta - a_{CA}^t \cdot \sin \beta. \quad (9)$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь проводимо з урахуванням таких співвідношень:

$$V_A = \omega_1 r; V_{BA} = \omega_2 l; V_{CA} = \omega_2 l_C; \sin \beta = \lambda \cdot \sin \varphi;$$

$$a_A = \omega_1^2 r; a_{BA}^n = \omega_2^2 l; a_{BA}^t = \varepsilon_2 l; a_{CA}^n = \omega_2^2 l_C; a_{CA}^t = \varepsilon_2 l_C;$$

де  $\omega_1, \omega_2$  - кутові швидкості колінчастого вала компресора та шатуна ( $\omega_1$  - const, її значення задається; значення  $\omega_2$  підлягає визначенню);

$\varepsilon_2$  - кутове прискорення шатуна;

$l, r$  - довжини шатуна та кривошипа;

$l_C$  - відстань від центра мас шатуна до осі кривошипа (шатунної шийки вала);

$\lambda = \frac{l}{r}$  - стала кривошипно-шатунного механізму.

Розв'язуючи (4-9) відносно шуканих величин, після нескладних перетворень одержали вирази для розрахунку кінематичних параметрів кривошипно-шатунного механізму поршневого компресора в залежності від кута повороту колінчастого вала, тобто для будь-якого моменту часу:

$$\omega_2 = \lambda \cdot \omega_1 \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}; \quad (11)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda \cdot \sin \varphi (\omega_2^2 - \omega_1^2)}{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}; \quad (12)$$

$$a_B = \omega_1^2 r \cdot \cos \varphi + \omega_2^2 l \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} - \frac{r \lambda \cdot \sin^2 \varphi (\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}}; \quad (13)$$

$$a_{C_x} = -r \sin \varphi \cdot \omega_1^2 \left(1 - \frac{l_C}{l}\right); \quad (14)$$

$$a_{C_y} = - \left[ \omega_1^2 r \cos \varphi + \frac{l_C (\omega_2^2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi \cdot \omega_1^2)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right]; \quad (15)$$

$$a_C = \sqrt{a_{C_x}^2 + a_{C_y}^2}. \quad (16)$$

Сили інерції ланок кривошипно-шатунного механізму визначаються за наступними формулами:

$$\bar{\Phi}_B = -m_B \bar{a}_B; \bar{\Phi}_1 = -\frac{1}{2} m_1 a_A; \bar{\Phi}_2 = -m_2 a_C; \bar{M}_2^J = -j_2 \varepsilon_2, \quad (17)$$

де  $m_B, m_1, m_2$  - маси поршня, кривошипа, шатуна;

$j_2$  - момент інерції шатуна відносно осі, що проходить через його центр мас;

$\Phi_{By}, \Phi_1, \Phi_2$  - сили інерції поршня, кривошипа, шатуна;

$M_2$  - момент сил інерції шатуна.

Прийнявши вісь обертання колінчастого вала компресора за центр зведення, визначимо головний вектор і головний момент сил інерції компресора (мал. 1б):

$$R_0^* = \sqrt{R_{O_x}^2 + R_{O_y}^2}; \quad (18)$$

$$M_0^* = \sum m_0 (\Phi_i). \quad (19)$$

З використанням попередніх міркувань останні рівняння набувають вигляду:

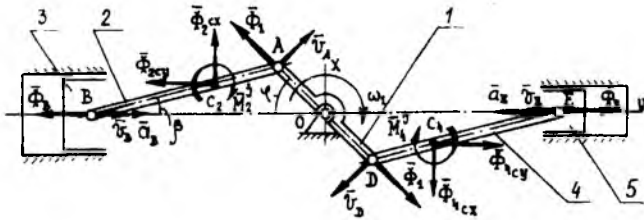
$$R_{O_x} = \sum \Phi_{i_x} = \Phi_{C_x} + \Phi_1^n \cdot \sin \varphi; \quad (20)$$

$$R_{O_y} = \sum \Phi_{i_y} = \Phi_{C_y} + \Phi_B + \Phi_1^n \cdot \cos \varphi; \quad (21)$$

$$\sum m_0 (\bar{\Phi}_i) = \Phi_{C_x} (r \cdot \cos \varphi + l_C \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}) - \Phi_{C_y} (l - l_C) \lambda \cdot \sin \varphi. \quad (22)$$

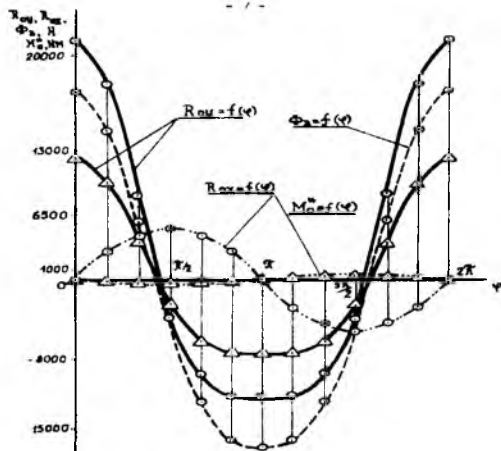
Одержані рівняння є справедливими для ряду поршневого компресора. У випадку експлуатації дворядних опозитних компресорних машин (мал.2) головні вектори сил інерції рядів повністю зрівноважуються, а головний момент сил інерції обчислюється за формулою:

$$M_0^* = 2 \left[ \Phi_{C_y} (l - l_C) \lambda \cdot \sin \varphi - \Phi_{C_x} (r \cdot \cos \varphi + l_C \lambda \cdot \sin \varphi) - M_2^J \right]. \quad (23)$$



Мал. 2 Інерційні сили і моменти, що діють в рядах двоступінчастого опозитного компресора  
 1 - кривошип; 2,3 - шатун і поршень першої ступені;  
 4,5 - шатун і поршень другої ступені

Розрахунки, проведені для компресора типу 2ВМ2,5-14/9 за традиційною [3] і поточною [рівняння (20-23)] методиками, показали, що в першому випадку  $\sum m(\Phi_i) = 0$ , а значення головного вектора сил інерції суттєво перевищує зазначений параметр, обчислений за розробленою авторами методикою (мал. 3).



Мал.3. Графічні залежності головного вектора і головного моменту сил інерції поршневого компресора від кута повороту  $\phi$  кривошипа ( $n_1 = 980 \text{ хв}^{-1}$ )  
 ○ - криві розрахункових інерційних сил, одержаних за традиційною методикою [3];  
 ▲ - криві розрахункових інерційних сил і моменту, одержаних за розробленою авторами методикою.

Окрім того, з наведеного графіка випливає, що горизонтальні складові головного вектора сил інерції ( $R_{0x}$ ) різняться не тільки за модулем, але й за напрямком. Останній факт обумовлює те, що при вжитих заходах по зрівноваженню сил інерції, замість очікуваного ефекту, спостерігається ще більша розбалансованість обладнання, яка за певних обставин може спричинити явище резонансу. Необхідно також зауважити, що зазначена горизонтальна складова для вертикальних поршневих машин є вкрай небажаною, оскільки фундамент останніх за таких умов працює у плоскому (замість лінійного) напруженому стані, що призводить до його швидкого руйнування. Для дворядного компресора загально прийнята методика [3] подає повну зрівноваженість як головного вектора, так і головного моменту сил інерції, всупереч одержаному авторами рівнянню (23).

Аналітико-чисельний аналіз, проведений авторами, показав, що традиційну методика [3] розрахунку сил інерції поршневих машин, як більш просту, доцільно використовувати для низькооборотних механізмів з частотою обертання колінчастого вала до  $300 \text{ хв}^{-1}$ . При цьому розбіжність досліджуваних параметрів, розрахованих за порівнювальними методиками, не перевищує 12%. Зі зростанням частоти обертання колінчастого вала традиційна методика розрахунку сил інерції стає абсолютно непридатною.

Попередні експериментальні дослідження підтвердили правомірність розробленої методики: відхилення між розрахунковими та експериментальними даними не перевищує 5-8%. Необхідно при цьому зауважити, що зі зростанням частоти обертання колінчастого вала зазначена розбіжність збільшується, що зумовлено, на нашу думку, інерційністю використовуваних приладів.

1. Михайлов А.К., Ворошилов В.П. Компрессорные машины. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 288 с.
2. Френкель М.М. Поршневые компрессоры. - 3-е изд. перераб. и дополнен. - Л.: Машиностроение, 1969. - 743 с.
3. Поршневые компрессоры /Б.С.Фотин, И.Б.Пирумов, И.К.Прилуцкий и др. - Л.: Машиностроение, 1987. - 372 с.
4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1985. - 398 с.

МАТЕМАТИКА	
	3
<b>В.І.Охрончук.</b> Диференціальні нерівності першого порядку в банаховому просторі . . . . .	3
<b>Г.П.Малицька, М.П.Федорів.</b> Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболических рівнянь . . . . .	10
<b>І.В.Федак.</b> Крайові задачі для одного диференціального рівняння другого порядку з параметром . . . . .	17
<b>Л.С.Возняк.</b> Про достатні умови збіжності методу послідовних наближень для рівнянь з малою нелінійністю . . . . .	23
<b>П.Б.Василишин.</b> Багатоточкова крайова задача для еліптичного диференціального рівняння четвертого порядку . . . . .	28
<b>Б.В.Атаманюк, О.М.Ворощук, Р.М.Чекайло.</b> Поповнення нескінченної ітерації досконало метризованого функтора та пари нескінченних ітерацій . . . . .	36
<b>Б.Л.Пелех.</b> Математичне моделювання в технологічній механіці армованих композиційних матеріалів . . . . .	41
<b>Б.М.Дрінь, О.В.Козич.</b> Основні етапи побудови інформаційних моделей динамічного типу . . . . .	50
ФІЗИКА	
	58
<b>М.А.Рувінський.</b> Співвідношення невизначеності і принцип тотожності у новому формулюванні квантової механіки . . . . .	58
<b>О.М.Возняк, П.П.Костробій.</b> Вплив динамічних кореляцій на хімічний потенціал двовимірного електронного газу . . . . .	64
<b>Б.К.Остафійчук.</b> Структура іонно-імплантованих ферит-гранатових плівок . . . . .	68
<b>Д.М.Фреїк, Я.П.Салій, С.Д.Кирста, В.М.Мельник, Г.Д.Матейк.</b> Вплив власних атомних дефектів на параметр ґратки ГЦК-кристалів $A^{IV}B^{VI}$ . . . . .	79
<b>М.М.Яцура.</b> Про електронну структуру цементиту, виділеного із відпущеної кремнієвої сталі . . . . .	85
<b>О.В.Копаєв.</b> Особливості рентгенофлуоресцентного аналізу феритів у тонких пробах . . . . .	95
<b>Л.М.Шараневич.</b> Вплив іонів індію і скандію на фізико-хімічні властивості марганцево-цинкових феритів . . . . .	103
<b>В.Д.Федорів, В.Д.Костишин, Т.П.Владімірова.</b> Вплив режимів епітаксії ферит-гранатових плівок на їх магнітні і оптичні характеристики . . . . .	106
<b>І.М.Гасюк, О.В.Копаєв.</b> Розподіл хімічних елементів у по-	

верхневих шарах магнітомагнітних феритів . . . . .	112
<b>І.В.Кабан, В.М.Кланічка, Р.Б.Тяско.</b> Структура двокомпонентних рідких сплавів на основі олова . . . . .	119
<b>В.М.Ткачук, О.М.Ткачук.</b> Модельне дослідження процесів іонної імплантації в багатокомпонентні структури . . . . .	129
<b>Л.М.Смеркло, Т.П.Владімірова.</b> Гібридно-інтегральні джерела потужних наносекундних імпульсів для техніки міліметрового діапазону хвиль . . . . .	132
<b>В.Л.Кегелес, М.О.Вольченко, Д.А.Вольченко.</b> До розрахунку сил інерції поршневого компресора . . . . .	140



## MATHEMATICS

	<b>3</b>
<b>V.I.Okhronchuk.</b> Differential inequalities by first order in the Banakh's space .....	3
<b>G.R.Malitska, M.P.Fedoriv.</b> Estimation of fundamental solutions for Cauchy's problem within one class degenerated parabolic equations .....	10
<b>I.V.Fedak.</b> Boundary value problems for a differential-operator equation .....	17
<b>L.S.Voznyak.</b> A convergence of the successive approximations for the operator's equations with a small nonlinearity .....	23
<b>P.B.Vasylyshyn.</b> A multipoint problem for elliptic differential equations by fourth order .....	28
<b>B.V.Atamanyuk, O.M.Vorochshuk, R.M.Chekailo.</b> Replineshment of perfectly metrizable functor infinite iteration .....	36
<b>B.L.Pelekh.</b> Math modelling of armoured CM in tehnological processes .....	41
<b>B.M.Drin, O.V.Kozich.</b> The major stages of building dynamic information models .....	50

## PHYSICS

	<b>58</b>
<b>M.A.Ruvinsky.</b> The uncertainty relations and the identity principle in the new interpretation of quantum mechanics .....	58
<b>O.M.Voznyak, P.P.Kostrobyi.</b> Dynamic correlations impact on chemical potential of 2-D electron gas .....	64
<b>B.K.Ostafijchuk.</b> Structure of ion-implanted ferrite-garnet films .....	68
<b>D.M.Freik, Ya.Saliy, S.D.Kyrsta, V.M.Melnyk, G.D.Mateik.</b> Influence of point defects on the $A^{IV}B^{VI}$ compound lattice .....	79
<b>M.M.Yatsura.</b> On sementite electron structure obtained from tempered silicone steel .....	85
<b>O.V.Kopayev.</b> X-Ray fluorescent analysis of ferrites in thih samples .....	95
<b>L.M.Sharanevich.</b> Indium and scandium ions influence upon physical and chemical characteristics of manganese-zinc ferrite .....	103
<b>V.D.Fedoriv, V.D.Kostyshyn, T.P.Vladimirova.</b> Influence of ferrite-garnet films epitaxy regime upon their magnetic and optical characteristics .....	106
<b>I.M.Gasuyk, O.V.Kopayev.</b> Chemical elements distribution in surface layers of magnet-soft ferrites .....	112
<b>I.V.Kaban, V.M.Klanichka, R.B.Tyasko.</b> Tin-based liquid .....	

double-component alloys structure .....	119
<b>V.M.Tkachuk, O.M.Tkachuk.</b> Model investigation of ion implantation processes in multifactoral structures .....	129
<b>L.M.Smerklo, T.P.Vladimirova.</b> Hybride integral sources of powerful nanosecond unpulses modulators for millimetre wave devices .....	132
<b>V.L.Kegeles, M.O.Volchenko, D.A.Volchenko.</b> On calculating inertial forces in piston compressor .....	140



**При оформленні статей для публікації у "Віснику Прикарпатського університету" просимо дотримуватись таких правил:**

1. Рукопис супроводжується направленням від закладу, де виконано роботу. Робоча мова журналу - українська.

2. Рукопис друкується на друкарській машинці з українським шрифтом або на принтері через 2 інтервали, поле зліва - не менше 3 см. Весь матеріал подається у двох примірниках (на білому папері з одного боку листка стандартного розміру 210x297 мм). Усі сторінки мають бути пронумеровані.

Таблиці, підписи до малюнків і анотації подаються на окремих сторінках. Анотація до 0,5 стор. машинописного тексту подається українською та англійською мовами (на окремих сторінках).

3. Обсяг статті - не більше 12 сторінок тексту (разом з таблицями) і 4-5 малюнків; для коротких повідомлень - до 7 стор. і 2 малюнки відповідно.

4. Стаття має бути підписана всіма авторами; слід вказати прізвище, ім'я та по батькові автора, його поштову адресу і телефон.

5. Замість одного з двох примірників статті необхідно надати дискету (яку після копіювання буде повернуто) із записом статті, виконаним в одному з таких текстових редакторів: Ami Pro 3.0, Word 6.0, Word 7.0 (англійськомовні версії) під Windows. Комп'ютерний набір статті повинен бути зверстаний за такими параметрами:

- відступи (margins): зліва, справа, зверху, знизу - 2,5 см.;

- інтервал (spacing): 1,5 (у підписах до малюнків - 1);

- шрифт (font): Baltica;

- розмір шрифта (font size): 14;

- малюнки, якщо вони подаються в окремих файлах, повинні бути записані в одному з таких форматів: Windows Bitmaps (\*.bmp), PC Paintbrush (\*.pcx), Tiff file format (\*.tif);

- якщо у статті присутні формули, набрані у Microsoft Equation 2.0, то вони повинні мати такі параметри:

стиль (style): Text - Baltica, Function - Baltica, Variable - Baltica, L.C. Greek - Symbol, U.C. Greek - Symbol, Symbol - Symbol, Matrix-Vector - Baltica (Bold), Number - Baltica;

розмір (size): Full - 14 pt, Subscript/Superscript - 9 pt, Sub-Subscript/Superscript - 7 pt, Symbol - 20 pt, Sub-Symbol - 14 pt.

6. Матеріал просимо подавати чітко, стисло, без повторів і дублювання в тексті таблиць, малюнків тощо.

7. Місце малюнків вказується в тексті і на лівому полі рукопису; на звороті кожного малюнка позначте прізвище першого автора і номер малюнка.

8. Графіки, малюнки, схеми, таблиці і т. ін. треба подавати у двох примірниках. Авторські примірники повинні мати бездоганну якість для їх чіткого відтворення при скануванні. Букви і знаки на другому примірнику кожного малюнка слід розмітити, як для набору (див. далі).

9. Фотографії слід подавати у трьох примірниках, надрукованими на глянцевому папері без подряпин та інших ушкоджень (не з'єднуйте знімки скріпками!). Знімки мають бути чіткими, контрастними і приблизно однакової тонової насиченості. Вкажіть масштаб на одному з ідентичних знімків. Усі необхідні написи також слід зробити тільки на одному примірнику фотографії.

10. Написи на малюнках слід замінити літерними позначками (якщо це можливо), а криві позначити цифрами, які слід пояснити в підписах до малюнків чи в тексті.

11. Формули слід вписувати чорним чорнилом або вдруковувати вільно, чітко, крупно; формули не повинні зливатися одна з одною і з текстом, щоб лишалося місце для розмітки.

12. Редакція просить подавати формули у найпростішому для набору вигляді.

13. Щоб не було помилок при наборі формул, їх слід розмітити. Грецькі букви підкресліть червоним олівцем, вектори (пишіть без стрілки) - синім; хімічні символи, нуль, позначення математичних функцій (exp, ln, sin, erf і т. ін.) - простим олівцем хвилястою лінією. Великі літери підкресліть простим олівцем двома рисками знизу. Слід чітко розрізняти латинські букви e та l, I та J (букву I писати як римську одиницю без крапки над нею), штрих, одиницю і кому в індексах. Букви і знаки, які важко розрізнити, поясніть на полях рукопису олівцем.

14. Посилання на літературні джерела подавайте в квадратних дужках порядковою цифрою.

15. Зміст і обсяг оглядових публікацій узгоджується авторами з редколегією, тому для попереднього розгляду слід представити анотацію і структуру огляду.

16. Список літератури подається в кінці статті в порядку посилань, які зроблено в матеріалі. Вказується ініціали і прізвища авторів (усіх авторів, якщо їх кількість менше чотирьох). При оформленні бібліографії дотримуйтеся бібліографічних правил, що були введені в дію 1 січня 1986 р. (ГОСТ 7.1 - 84).

17. При цитуванні перекладних видань слід посилатися на оригінальні джерела.

18. Розмір графіків і тонових фотографій має бути не більше 8 см шириною і 20 см довжиною, а складних малюнків - не більше 16 см шириною. Тонові малюнки мають бути контрастними. Ксерокопії не приймаються. На звороті кожного малюнка позначте прізвище автора, початок назви статті і номер малюнка. Редакція може відхилити статтю з ілюстративним матеріалом незадовільної якості.

19. До рукопису додається точна адреса, прізвище, повне ім'я та по батькові авторів, номер службового чи домашнього телефону. Вкажіть автора, з яким буде вестися листування.

20. Питання, пов'язані з публікацією наукових оглядів, вирішуються редколегією на підставі попередньо поданої авторами розширеної анотації роботи.

Міністерство освіти України  
Прикарпатський університет імені В.Стефаника

ВІСНИК  
Прикарпатського університету  
імені Василя Стефаника

ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ  
Випуск I

Видається з 1995 р.

Адреса редколегії: 284000, Івано-Франківськ,  
вул.Шевченка, 57, тел. 2-33-79  
Видавництво "Плаї" Прикарпатського університету  
284000 Івано-Франківськ,  
вул.Шевченка, 57, тел. 96-481

(Українською мовою)

Ministry of Education of Ukraine  
PreCarpathian University named after V.Stefanyk

NEWSLETTER  
PreCarpathian University  
named after Vasyl Stefanyk

NATURAL AND MATHEMATICAL SCIENCES  
1st issue

Published since 1995

Publishers' address: 57, Shevtchenko Str.,  
284000 Ivano-Frankivsk, tel. 2-33-79  
PLAI Publishers, PreCarpathian University  
57, Shevtchenko Str.,  
284000 Ivano-Frankivsk, tel. 96-481

(Published in Ukrainian Language)

Головний редактор О.П.Бойчук  
Літературний редактор Н.О.Ясинська  
Коректура і комп'ютерна верстка І.М.Андрусак

Друкується українською мовою.  
Реєстраційне свідоцтво КВ №435.

Здано до набору 27.04.95. Підп. до друку 14.11.95 р. Формат  
60x84/16. Папір офсетн. Літ. гарн. Ум. друк. арк. 9,52. Видав. арк.  
10,28. Зам. 39. Тираж 300 прим. (Попередній тираж 120 прим.)

Львівська видавництва "Плаї" Прикарпатського університету.  
Івано-Франківськ, вул.Шевченка, 57.

НБ ПНУС



602045